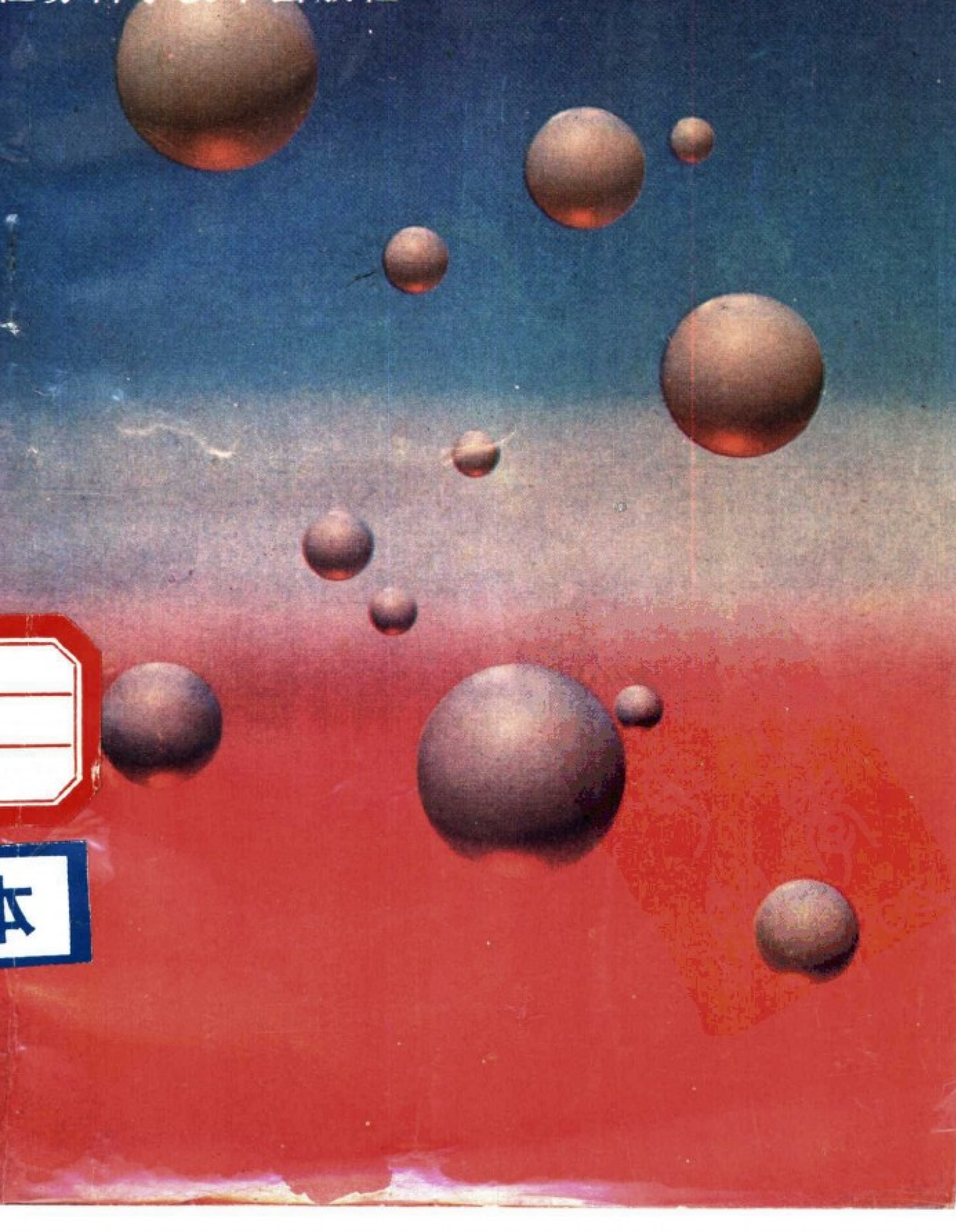
数学灵感何处来

江苏科学技术出版社



数学灵感何处来

朱成杰　编著

数学灵感何处来

出版、发行：江苏科学技术出版社
经　　销：江苏省新华书店
印　　刷：淮阴新华印刷厂

开本 787×1092 毫米 1/32　印张 3.75　字数 80,000
1988 年 7 月第 1 版　1988 年 7 月第 1 次印刷
印数 1－5,000 册

ISBN 7—5345—0387—6

O·30　定价：1.25 元
责任编辑　高楚明

前　　言

学数学的人常有这样的体会：一个难题百思不得其解，不知什么原因，一个好念头忽然蹦了出来，于是思路被接通，难题迎刃而解。这个"好念头"就是所谓"灵感"。自古以来有多少数学家，正是由于灵感的突然光顾，创造了全新的理论、全新的公式和全新的定理，一举登上事业的高峰。正如著名科学家钱学森所说："光靠形象思维和抽象思维不能创造，不能突破；要创造要突破得有灵感。"

千百年来，灵感如同幽灵一样，飘忽不定，难以捕捉。她虽然具有迷人的魅力，但终因其神秘的外衣，人们难识其庐山真面目。其实，灵感如同其他一切人们虽已有所接触但尚未认识的事物一样，只要认真探索，还是有踪迹可寻的。笔者根据自己多年研读数学史、数学家传记的心得体会，以及对数学发明创造规律和数学教学规律的求索，写成这本小书，努力从心理学、方法论诸角度探寻数学灵感究竟是什么？她在何种条件下易于被激发出来？试图拨开罩在灵感上面的神秘面纱，还其本来面目。书中例题尽量选自中外名题，同时述说著名数学家的成功经验和失败教训，力图溶趣味性、知识性、启发性于一体，期望收到学习方法、启迪智慧、增强思维的效果，为广大青年学生和知识青年学好数学助一臂之力。

书中各篇的先后顺序，笔者虽然作了一番考虑，但并不是很严格的。读者完全可以根据自己的兴趣爱好，从中挑选若干篇先阅读，然后再读其余部分。只要具有中等文化程度就可读懂全书。限于作者水平，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正。

目　录

一、插上想象的翅膀

大诗人李白用“蜀道之难，难于上青天”形容蜀道之艰难，用“飞流直下三千尺，疑是银河落九天”描绘遥看瀑布的情景。人们无不为诗人丰富而奇特的想象所折服。其实，不只是文学家需要想象，数学家也同样需要想象，甚至更加需要。德国大数学家希尔伯特曾经对人这样说起自己的一个蹩脚学生：“他已当诗人去了。对于数学来说，他太缺乏想象力了。”让我们具体地看两个数学例题。

下面这道题目也许曾在好几个世纪里引起过人们的兴趣。

［例 1］ 一个农民有若干鸡和兔子，它们共有50个头和140只脚，问鸡和兔子各有多少？

这个题目不算太难，用试探的方法或解二元一次方程组的方法都能得到答案(读者不妨自己试一下)。下面介绍另一个巧妙的解法。

想象鸡兔们正在进行非凡的杂技表演：每只鸡都用一只脚站着，而每只兔子都用后腿站起来。在这种惊人的情况下，总脚数只出现了一半，即70只脚。在70这个数里，鸡的头数只数了一次，而兔子的头数却数了两次，从70里减去总的头数50，剩下来的就是兔子的头数 $70-50=20$。兔子20只，当然鸡就是30只。

好家伙，不用列算式，只用心算就得到了答案。这完全是想象的功劳！借助于鸡兔作杂技表演这一想象，原来比较复

杂的问题就被转化为一个非常简单容易的问题了.

下面再举一个几何例子.

［例 2］ 试证明一个周长为 $2l$ 的封闭曲线一定可以被一个直径是 l 的圆盖住.

这个问题很难，因为周长为 $2l$ 的封闭曲线可以取任意形状，一下子简直不知从何着手. 但是，既然问题中的封闭折线没有规定是什么形状，我们何不先从特殊情况试试. 假定曲线形状是正方形，这个情况容易证明，把一个直径是 l 的圆形纸片的圆心与正方形的中心 O 重合. 要证明这个圆能盖住正方形，只要证得 A、B、C、D 四个顶点都被盖住即可. 在图 1 中，

$$由\ OA=\frac{1}{2}AC<\frac{1}{2}(AB+BC)=\frac{l}{2}$$

可知，A 点确被圆纸片盖住。同理可证得 B、C、D 点均被盖住. 因此，周长为 $2l$ 的正方形可以被一个直径是 l 的圆盖住.

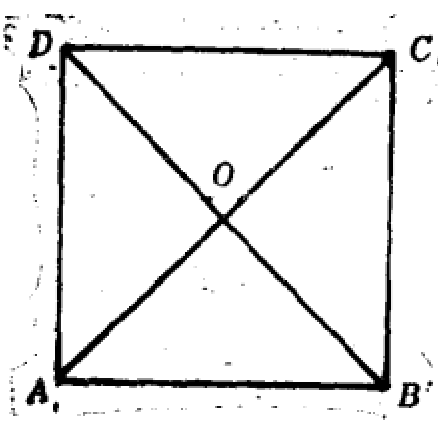


图 1

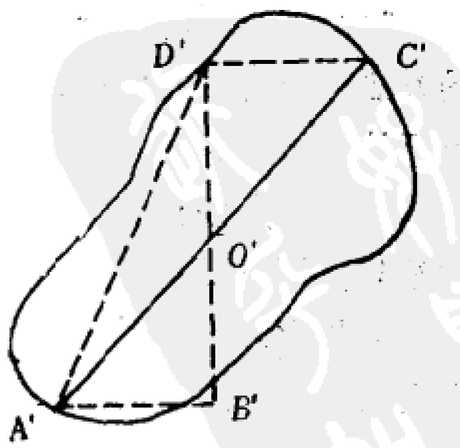


图 2

对于任意形状的曲线P如何证明呢？不妨把这个曲线P想象成是由正方形 $ABCD$ 扭曲而成(见图 2).既然曲线P是

由正方形变形所得，两者之间必有内在联系，因此可尝试将正方形时用过的方法移植到任意曲线上。对角线 AC 把正方形 $ABCD$ 的周长分为相等的两部分，曲线 P 上也可找到 A'、C' 两点，把曲线 P 的周长分成相等的两部分。O 是 AC 的中点，也取 $A'C'$ 的中点 O'。同样把圆纸片的中心放在 O' 点。设 D' 点是曲线 P 上任意一点，若延长 $D'O'$ 到 B' 点，使 $O'B'=O'D'$，则可得到一个平行四边形，可以证得 $2O'D'\leqslant A'D'+C'D'$，于是有

$$O'D'\leqslant\frac{1}{2}(A'D'+C'D')<\frac{1}{2}A'D'C'\text{ 的曲线弧长}=\frac{l}{2}.$$

因此 D' 点能被圆盖住。这就证得整个曲线 P 都能被圆盖住。

根据心理学家和生理学家的研究，人的大脑有四个功能部位：感受区，从外部世界接受感觉；贮存区，收集整理和贮存接受到的感觉；判断区，评价收到的信息；想象区，按照新的方式把旧的信息结合起来。人脑不仅能感知眼前的事物，回忆起过去经历过的事物，而且还能在过去认识的基础上，去构成未来可能出现的事物的形象。这种能力称为想象力。想象力是智力活动的翅膀，是构成灵感的重要因素。

列宁曾高度评价想象在科学中的重要作用，他说："幻想是极其可贵的品质。""有人认为，只有诗人才需要幻想，这是没有理由的，这是愚蠢的偏见！甚至在数学上也是需要幻想的，甚至没有它就不能发明微积分。"当我们想象在一个无限伸展的平面上，过直线外一点只有一条平行线时，就得到了欧几里得几何学；而当罗巴切夫斯基、黎曼等人想象到在平面上，过直线外一点可以引两条以上平行线或者根本没有平行线时，就创造了非欧几何。在欧几里得几何里，任意

一个三角形的三内角之和都等于180°.但是在非欧几何里，三角形的三内角之和则可以大于180°，也可以小于180°．例如从地球的同一条纬线上相隔一段距离的任意两点出发，朝同一方向作两条与纬线垂直的经线，它们总会在地球的某一极（南极或北极）相交，构成一个球面三角形．这个三角形的三内角之和就大于180°．爱因斯坦说得非常对，“想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识进化的源泉．”

丰富的想象能力是从哪里来的？它既不可能从天下掉下来，也不是头脑中固有的，而是在学习和实践中逐步培养和锻炼出来的．例如给你一只空罐头盒，在五分钟内你能列举它有多少种用途？空罐头盒可以做香烟缸、墨水瓶、茶杯、饭碗、玩具汽车的轮子、小鼓、垫块；剪成铁皮后，可以做刀片、垫板、夹子、加盐酸置换出氢气等等．经常进行这样的训练就能发展你的想象力．有些人在学习理论研究问题时，喜欢把抽象的概念构思成一定的形象，然后进行逻辑思维．这也是发展想象力的好经验．许多科学家除了精通本专业外，还对自然界的各种事物和其他学科有浓厚的兴趣，勤学博览，这对于扩大知识面，不断接受各种新的信息，获得新的启发，从而丰富和增强自己的想象力都是非常有益的．

二、数学离不开猜想

1976年，发生了一件震惊世界数学界的大事。三位美国数学家利用三台百万次的电子计算机证明了四色猜想：任何平面上的地图，总可以把它的每一个国家用四种颜色中的一种来染色，并且使得任意两个相邻国家的颜色都不相同。有趣的是，这个结论早在一百多年前就知道了。当时一个名叫格色里的英国人发现，他碰到的所有地图，都可以只用四种颜色来染色。于是，他就根据经验归纳法作出了上面的“四色猜想”。由猜想导致数学发明的事实俯拾皆是。如哥德巴赫关于“任何一个大偶数都可表示成两个质数之和”的猜想，“所有等周长的平面图形中，以圆的面积为最大”的猜想等等。数学通常被人们看作一门论证科学，似乎定理加证明就构成了它的全部内容。殊不知这仅仅是它的一个方面。其实，数学的创造过程与其他任何知识的创造过程一样。在证明一个定理之前，你先得猜想这个定理的内容，在你作出详细证明之前，你先得猜想证明的思路。简言之，一切数学定理及其证明都离不开猜想。如果没有猜想，数学家将寸步难行；如果没有猜想，如今矗立在我们面前的这座雄伟瑰丽的数学宫殿就不复存在。猜想是数学家手中的一支金拐杖。

为了更好地理解猜想的作用，我们举一个初等几何例题。

在各边长度给定的一切四边形中，何时四边形具有最大面积？

因为四边形的各边长度给定，于是面积大小随四边形顶角大小而变化。为了得出一般结论，不妨先取一特殊情况。设四边长相等，则四边形为菱形或正方形，显然当四边形为正方形时面积最大。能否由此推测各顶角均为直角时，四边形面积最大？如设四边长为 a、b、c、d，考虑到当 a、b 夹角为直角时，则斜边为定长，而斜边与其余两边 c、d 不一定恰能构成直角。所以四边形有最大面积时，各顶角不一定都是直角。因此我们可以猜想：四边形对角互补时面积最大。这个猜想可以证明如下：

如图 3，四边形面积 S 为

$$S = S_{\triangle ABC} + S_{\triangle ADC}$$

$$= \frac{1}{2}\left(ab\sin\alpha + cd\sin\beta\right)$$

即 $ab\ \sin\alpha + cd\ \sin\beta = 2S$ （1）

又 $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\alpha$

$AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd\ \cos\beta$

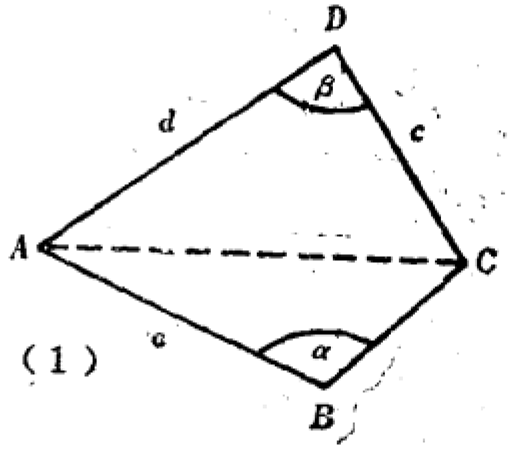


图 3

两式相减得 $ab\ \cos\alpha - cd\ \cos\beta = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2)$ （2）

把（1）、（2）分别平方、相加，经整理可得

$$S^2 = \frac{1}{4}\left[a^2b^2 + c^2d^2 - 2abcd\ \cos(\alpha+\beta)\right] - $$

$$-\frac{1}{16}(a^2 + b^2 - c^2 - d^2).$$

上式仅当 $\cos(\alpha+\beta)$ 取最小值 -1，即 $\alpha+\beta=\pi$ 时，S 取最大值。因此我们得到了定理：在各边长度给定的一切四边

形中，当对角互补时面积最大。

数学猜想对数学发展的巨大推动，不仅由于由猜想得到的结论可以作为进一步研究的基础和出发点，而且还在于一个好的猜想往往证明非常困难，因而迫使数学家在探索其证明的过程中创造出新的方法。费尔马是一个业余数学家，他有这样一种习惯：把读书心得，以及发现的定理或证明，随便地写在书页的边上。他在《算术学》这本书的页边写道："任何整数的立方，不能分成两个整数的立方和；任何整数的四次方不能分成两个整数的四次方之和；或者一般地，任何整数的n次方，除平方外，都不能分成两个整数的n次方之和。我想出了一个绝妙的证明方法，但是，这页边太窄，不容我将证明写出来。"也就是说，费尔马猜想方程$x^n+y^n=z^n$，当$n>2$时，永远没有整数解。这个结论，从经验上看似乎不难证明。可是，当费尔马的儿子将这个结论发表之后，世界各国最著名的数学家都想重新给出它的证明方法，但是都没有成功。费尔马猜想成了数学史上一个非常著名的难题。后来，人们干脆称之为"费尔马大定理"。为了征得这个难题的解答，德国科学院和法国科学院不惜重金悬赏。但是，结果只是每年都收到大量错误证明的稿件（其中包括一些著名数学家的稿件）。在科学研究上的失败，绝不会是徒劳的。正是由于众多数学家前仆后继、不畏劳苦地寻求费尔马猜想的证明，其中一些数学家在"数论"方面创造了一系列新的理论和新的数学方法，从而大大推动了数学的发展。费尔马猜想可称得上是一只产金蛋的老母鸡。写到这里，笔者想起一个趣闻：当年大数学家希尔伯特称他已证明了费尔马大定理，然而他不肯发表，因为他舍不得杀掉这只产金蛋的老母鸡。这恐怕是人们编出的一则故事，但确实能

生动地说明数学猜想的作用。

素以严谨著称的数学，怎么会离不开猜想这种不严格的思维形式呢？对这个问题的认识得有点辩证法。对待数学和对待其他科学一样，不仅要会严格，而且要善于不严格。科学就是“严格”与“不严格”的对立统一。过于严格只能循规蹈矩地前进，而善于“不严格”却往往能得到出奇制胜的成功。当初，牛顿、莱布尼茨制定微积分时，也是很不严格的，含有相当的猜测成分。在以后大约两个世纪的漫长岁月中，经过波尔察诺、魏尔斯脱拉斯、柯西等人的巨大努力才奠定了理论基础。至今，数学理论中还有许多不严格的地方，还有许多基本问题尚未找到令人满意的答案。试问，如果不允许不严格的猜想存在，数学到底能走多远？！正是：“不依古法但横行，自有风雷绕膝生”。难怪科学家福克（В．А．Фок）说：“伟大的以及不仅是伟大的发现，都不是按逻辑的法则发现的，而都是由猜测得来；换句话说，大都是凭创造性的直觉得来的。”

三、分析与综合

数学离不开猜想，但是由猜想得到的结论不一定都正确，需要进一步从逻辑上加以论证。如何进行证明呢？分析法与综合法就是最常用的两种思维方法。

所谓分析法，就是"执果溯因"的方法，即从待证的结论出发，一步一步地探索下去，直至最后达到命题的已知条件。

如果要证明的命题是"若A则B"，那么分析法的思维过程如图4所示（由下往上看）：

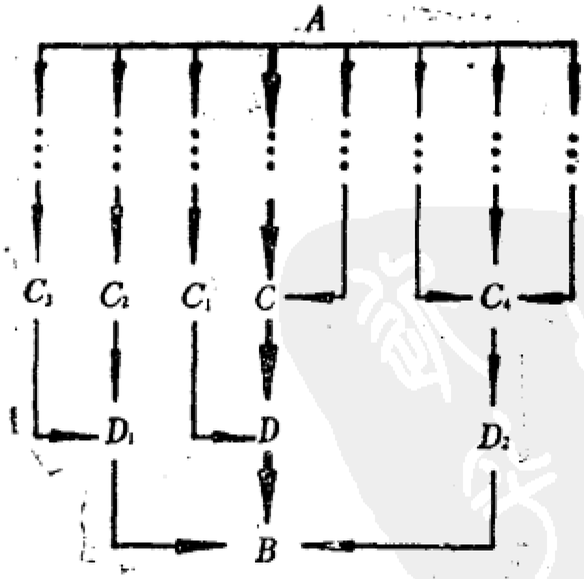


图 4

从图中可见，要证明结论B，依已知定义、定理、公理等，只要证出D、D_1、D_2中一个即可；要证出D_1只要证出C_2、C_3中一个即可；要证出D只要证出C、C_1中一个即可；

要证出 D_2 只要证出 C_4 即可；……如此逐层上溯，只要找到一条由待证结论 B 上接已知条件 A 的通路（如图中粗实线所示），我们就可得到“$B\Leftarrow D\Leftarrow C\Leftarrow\cdots\Leftarrow A$”这条证明的思路。

［例 1］ 在 $\triangle ABC$ 中，已知 BE 是 $\angle B$ 的平分线，$EF\parallel BC$，$FG\parallel AC$（见图 5），试证明 $BF=GC$。

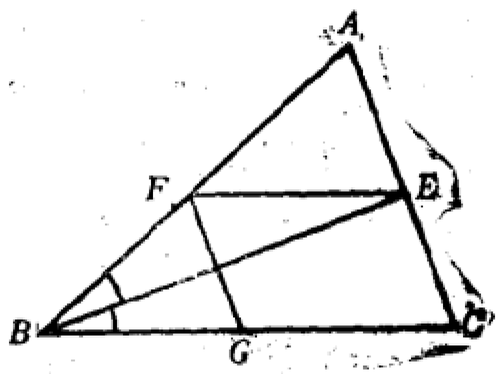


图 5

证明 要证明 $BF=GC$，注意到 $EFGC$ 是平行四边形，有 $EF=GC$，只要证明 $BF=FE$ 就可。要证明 $BF=FE$，考虑到这两条线段在同一个三角形中，只要证明 $\triangle FBE$ 是等腰三角形，即证明 $\angle FBE=\angle FEB$ 就可。由已知 $FE\parallel BC$，有 $\angle FEB=\angle EBC$，因此只要证得 $\angle FBE=\angle EBC$，而这

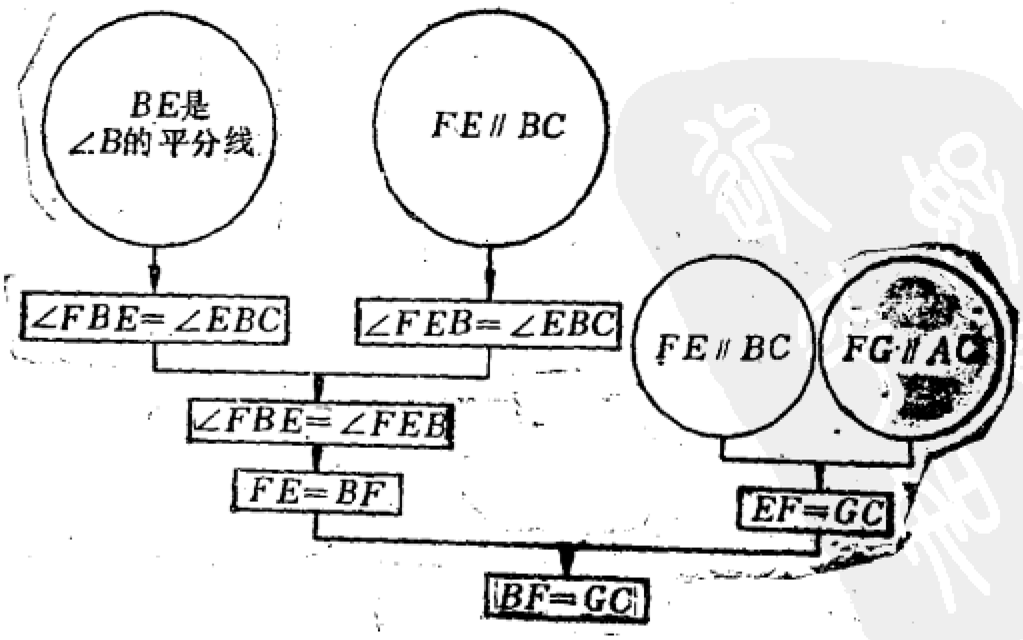


图 6

可由已知条件 BE 是 $\angle B$ 的平分线得到。上面的证明思路可用逻辑推理框图（见图 6）表示为：

图中的图形框表示已知条件、定义、定理或公理等，矩形框表示待证结论和中间步骤。由下往上推，当枝形图中每一分支的顶端都是圆形框时就表明证明完毕。

所谓综合法，就是“由因导果”的方法，即从命题的条件出发，经过一步一步的逻辑推理，最后达到待证的结论。

如果要证明的命题是“若 A 则 B”，那么综合法的思维方式可用图 7 表示（由上往下看）：

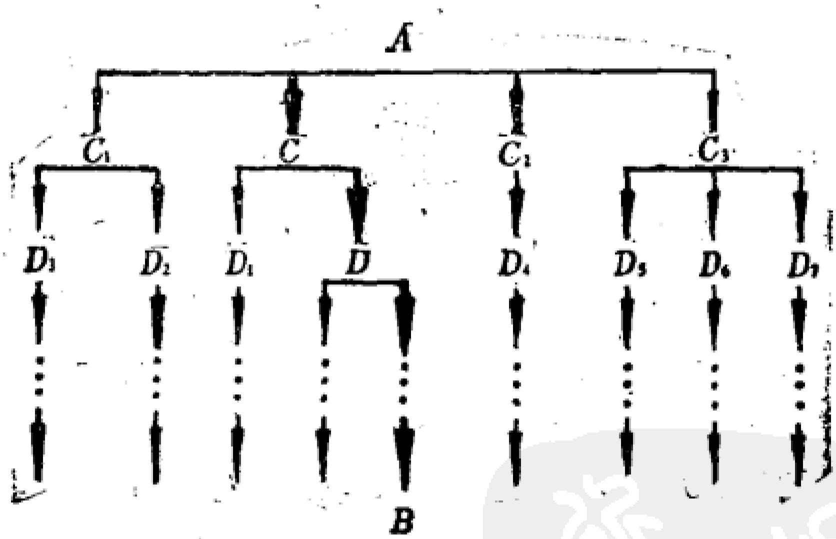


图 7

从图中可见，从条件 A 出发，依已知定义、定理、公理，可推出结论 C、C_1、C_2、C_3；由 C、C_1、C_2、C_3 又可推出 D、D_1、D_2、D_3 等等；如此逐层下推，每层可得结论若干，如能构成一条由已知条件 A 到达待证结论 B 的通路（如图中粗实线所示），我们就得到“$A \Rightarrow C \Rightarrow D \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$”这一证明思路。

［例 2］ 如图 8，已知 PA、PB 切圆 O 于 A、B 点，PO

交 AB 于M点，QR 是过M点的任意一条弦，求证 OP 平分 $\angle QPR$.

从待证结论出发可以考虑，只要证得 $\angle APQ=\angle BPR$，就可由 $\angle APO=\angle BPO$ 证得结论．或者在含有 $\angle QPM$ 和

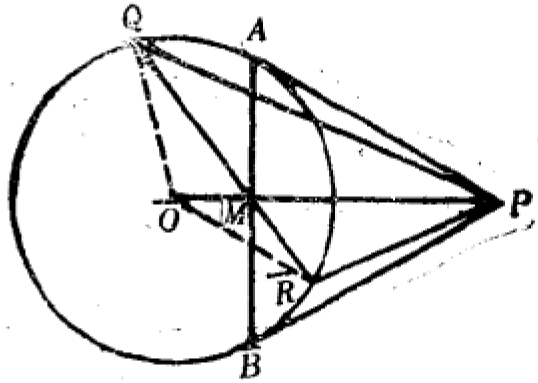


图 8

$\angle RPM$ 的三角形中寻找全等或相似的关系．但在这些线索中都没有可以利用的条件，因此分析法失败．不妨改用综合法，考虑由已知条件出发，可派生出哪些结论．由已知PA、PB是切线，可推得$\angle PAO=PBO=90°$，因而P、A、O、B四点共圆．由此又可得到 $PM\cdot OM=AM\cdot BM$．另一方面，因为 AB 与 QR 是$\odot O$ 的相交弦，因此 $AM\cdot BM=QM\cdot RM$，于是$PM\cdot OM=QM\cdot RM$．由此可得P、Q、O、R四点共圆，所以$\angle QPO=\angle QRO$，$\angle RPO=\angle RQO$．而$OQ=OR$，于是可以推出待证结论．上面的证明思路可由逻辑推理框图表示（见图 9）。

在实际解题时，常常需要把分析法和综合法结合起来运用．一方面按照分析的思路，追溯待证结论成立所必需的各种条件，另一方面按照综合法的思路探求由已知条件必然产生的种种可能结果，由两边往中间"凑"，当两种思路接通

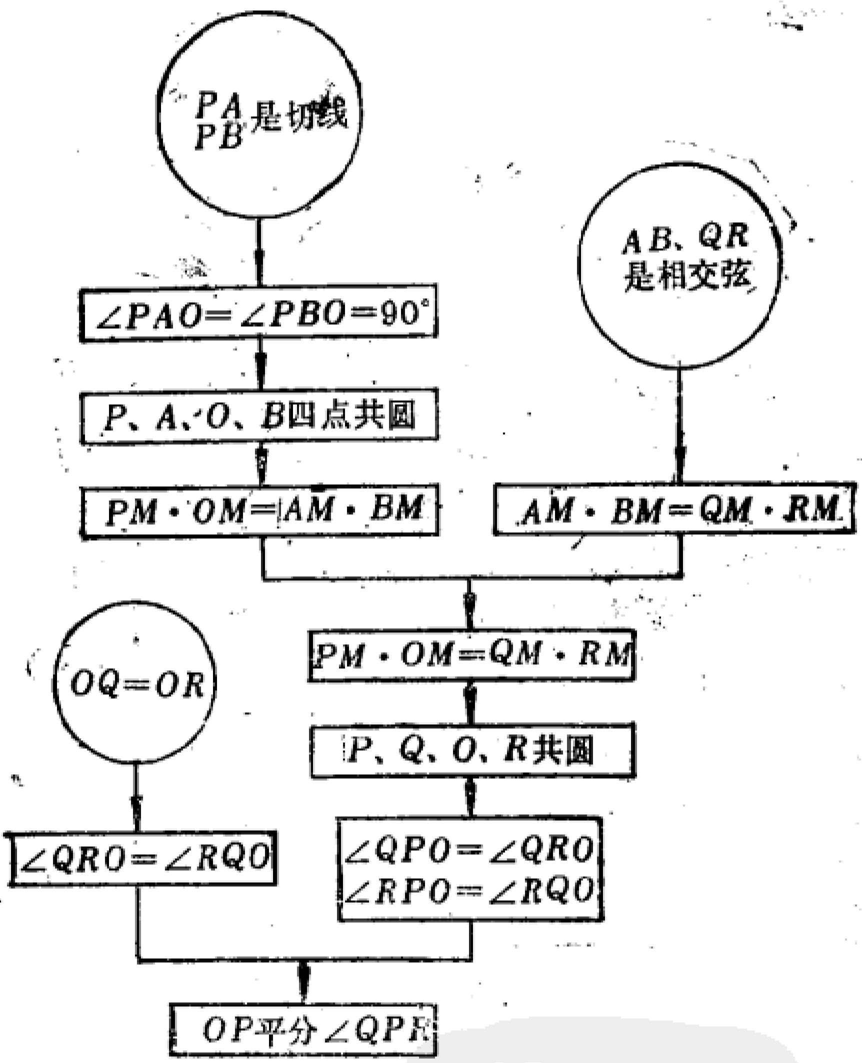


图 9

时，问题也就得到解决。为节省篇幅，就不再举例了。

四、反其道而行之

某甲问：张三是否在教室里？某乙答：我没有看见．某乙虽然没有直接回答某甲的问题，但是某甲仍然从答句中获取了张三不在教室里的信息．这是因为如果张三在教室里，某乙一定会看见他的．这种从反面回答问题的思维方法在数学证明中也非常有用．请看下面的例题．

〔例 1〕 今有 4 只鸽子要飞进甲、乙、丙三个洞，你能否证明至少有一个洞里至少飞进 2 只鸽子？

一个自然的想法是列举所有各种可能情况，如下表：

洞名	鸽子数														
甲	4	3	3	2	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0
乙	0	1	0	2	0	1	3	0	2	1	4	0	3	1	2
丙	0	0	1	0	2	1	0	3	1	2	0	4	1	3	2

共有 15 种 情 况，无论哪种情况均有一个洞至少飞进 2 只鸽子，因而命题得证．显然这样的证明是很麻烦的．如果数字再大些，譬如证明10只鸽子飞进 3 只洞至少有一只洞至少飞进 4 只鸽子，计算量将非常大，而且会由于考虑不周（或遗漏或重复）而算错．

现在尝试从反面进行考虑．假设每一个洞里至多飞进一

只鸽子，于是甲、乙、丙三个洞里的鸽子总数至多只有3只，这与已知条件有4只鸽子飞进洞里矛盾．所以，每一个洞里至多飞进1只鸽子的假设是错误的．因此，至少有一个洞里至少有2只鸽子．显然，这个证明比上面的方法简便得多．而且这个方法对于证明10只鸽子飞进3个洞里至少有一洞里飞进4只鸽子同样适用．

我们把这种欲擒先纵、反其道而行之的证明方法叫做反证法．仔细分析一下，上面的证明包含四个步骤：

1．假设命题的结论不成立；

2．经过推理，导致矛盾；

3．断定“结论不成立”的假设是错误的；

4．肯定原来命题的结论正确．

我们再举一个比较复杂一些的例子．

［例2］ 证明如果所有周长相等的平面图形中存在面积最大的图形，则这个图形必定是圆．

我们分三步进行证明．

1．先证明：如果图形F是周长相等的一切平面图形中面积最大的一个，则F必是凸图形（所谓凸图形，是指连接该图形内的任意两点所得的线段，与图形的周界都没有交点，反之则称为凹图形）．用反证法证明：

假设图形F是凹图形，如图10所示，以AC为对称轴，作曲线ABC的轴对称图形$AB'C$，那么封闭曲线$ADCB'$与原来的曲线$ABCD$周长相等，但面积却比原来的大，这与已知图形F是面积最大的图形矛盾，因此，图形F必定是一个凸图形．

2．证明如果图形$F(ACBDA)$是周长相等的一切平面图形中面积最大的，则任意平分F的周长L的弦(AB)，必定

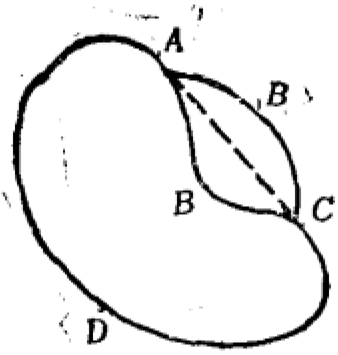


图 10

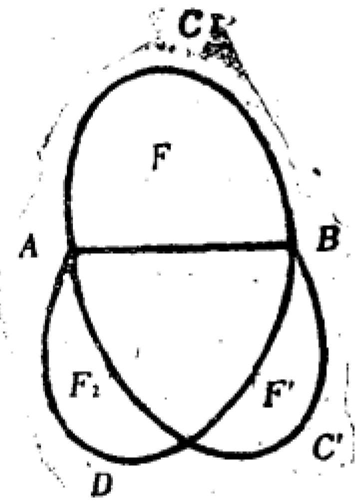


图 11

把图形F分为面积相等的两个部分. 在图 11 中, 假设$F_1 \neq F_2$, 不妨令$F_1 > F_2$, 那么,以AB为对称轴, 作$F_1(ABCA)$的对称图形$F'(AC'BA)$, 则图形$ACBC'A$的周长等于L, 但面积比原来的图形F大, 与"图形F的面积最大"这一已知条件矛盾. 因而必有$F_1 = F_2$. 这就证得了若弦AB平分F

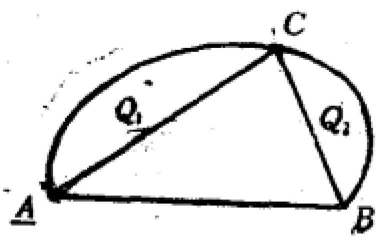


图 12

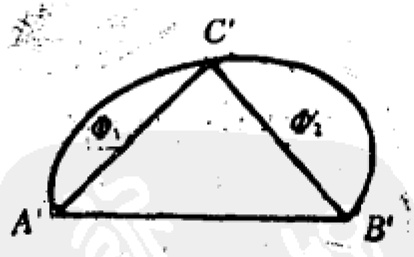


图 13

的周长, 则必定平分F的面积.

3. 最后, 我们证明F必定是圆. 在图$ACBA$的$\overset{\frown}{ACB}$上任取一点C, 连结AC、BC. 因为图形F是凸图形, 所以线段AC、BC均在F内. 下面证明$\angle ACB = 90°$. 假设$\angle ACB \neq 90°$, 如图12所示, 将两个小弓形ϕ_1、ϕ_2剪下, 使夹角ACB转动成直角, 从而得到另一个图形$A'C'B'A'$, 如图 13 所示. 于是

图形 $ACBA$ 的面积 $= \phi_1 + \phi_2 + \triangle ABC$ 的面积 $= \phi_1 + \phi_2 + \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin\angle ACB$

图形 $A'C'B'A'$ 的面积 $= \phi_1 + \phi_2 + \triangle A'B'C'$ 的面积 $= \phi_1 + \phi_2 + \frac{1}{2}A'C' \cdot B'C' \cdot \sin 90° = \phi_1 + \phi_2 + \frac{1}{2}AC \cdot BC$.

$\because \quad \angle ACB \neq 90° \qquad\qquad \therefore \quad \sin\angle ACB < 1$

于是图形 $ACBA$ 的面积小于图形 $A'C'B'A'$ 的面积，这与假设图形F的面积最大矛盾，所以 $\angle ACB = 90°$.

因为 C 点是 $\overset{\frown}{ACB}$ 上任意一点，$\angle ACB$ 均为直角，所以 $ACBA$ 一定是以 AB 为直径的半圆. 同理可以证明图形F的另一半也是以 AB 为直径的一个半圆. 所以，图形F是一个圆. 综合上面三个步骤，我们就证得，在一切周长相等的平面图形中，圆的面积为最大.

例 1 的直接证明相当复杂,用反证法就非常简便.例 2 要直接证明，简直难得无从下手，由于采用了反证法就化难为易了. 反证法具有如此神奇的本领，它的根据何在呢?

反证法的逻辑依据是矛盾律和排中律. 矛盾律的含义是，人们思考问题时，对于同一个思考对象不能作出两个互相矛盾或互相反对的判断. 如果出现了这种情况，矛盾律就向人们指出：在这两个互相矛盾或互相反对的判断中，必定有一个是假的，也可能两个都是假的. 譬如在你面前有一支铅笔，你就不能说“它是红铅笔”，同时又说“它不是红铅笔”或“它是黄铅笔”等等. 排中律的含义是说，在同一讨论过程中，对某个问题的两种互相否定的判断中，必然有一个是真的。譬如，放在你面前的那支铅笔,它不是“红的”，就是“非红的”，绝不会有第三种可能出现。

为了说明方便，设要证明的命题是“若A则B”，A是已知条件，B是结论。根据矛盾律，结论“B”和通过假设加以否定的结论“非B”中必有一个是假的。如果原命题成立，则由“非B”出发必然会推出矛盾，从而证得“非B”是错误的。而根据排中律，“B”和“非B”中必然有一个是真的，既然“非B”错误，因此原结论“B”就肯定是正确的了。这就是反证法的逻辑过程。

对于那些直接证明比较复杂或者无从着手的命题，可以考虑采用反证法。某些以否定形式出现的命题，或者与无限有关的命题，或者结论中涉及到“至多”、“至少”、“唯一”的命题，常常用反证法证明。

五、出奇制胜的反例

我们知道，自然数集按约数的情况可以分成三类：

第一类：1，约数只有一个，即1本身.

第二类：质数，约数只有两个，即1和这个数本身.

第三类：合数，约数多于两个，即除1和自身外，还有其他约数.

任何合数都可分解为若干个质数连乘积的形式．因此质数在自然数集中占有特别重要的地位．一共有多少个质数？

欧几里得回答说：有无穷多个．他的证明很简单．假设只有有限多个质数，那么，就可以把它们统统写出来，记为p_1，p_2，…，p_n，此外，再也没有质数了．然而下面的数

$$p_1\times p_2\times\cdots\times p_n+1$$

它不能被质数p_1，p_2，…，p_n中的任意一个整除（为什么？请读者自己思考一下）．这就说明$p_1\times p_2\times\cdots\times p_n+1$这个数或者是一个质数，这个质数显然比一切$p_1$，$p_2$，……，$p_n$都大；或者能被比$p_1$，$p_2$，…，$p_n$都大的质数整除．无论哪种情况都证明了确有比$p_1$，$p_2$，…，$p_n$都大的质数存在．因此，只有有限多个质数的假设是错误的．所以，质数有无穷多个．

上面证明的关键是构造一个反例（新的质数）．你不是说质数全都在此，再也没有了吗？立即给你造出一个，使你张口结舌，无言以对．无怪乎有的数学家赞叹道："欧几里得的证法真是出奇制胜，一针见血，闪耀着智慧的光辉."

再举一个饶有趣味的例子．运用数学归纳法，我们可以证明世界上所有的狗都具有相同的颜色．也许你会说，狗有白的、黑的、花的……这个事实谁人不知．竟要证明所有的狗颜色相同，真是天方夜谈！且慢，请看下面的证明：

设 p_n 表示命题：任意 n 只狗具有相同的颜色．

（1）显然 p_1 正确，即一只狗具有相同颜色．

（2）假定 p_k 正确，即任意 k 只狗有相同颜色．如果用 Q 表示任意 $k+1$ 只狗组成的集合，我们总可以把 Q 看成是两个由 k 只狗组成的集合 X 和 Y 的并集，并且集合 X 和 Y 中含有相同的狗．譬如 5 只狗可看成是两个由 4 只狗组成的集合的并集，其中有 3 只狗为两个集合所共有．若把 5 只狗按自然数进行编号，则可如图14所示。因为根据假定，X 集合中的狗都有相同颜色，Y 集合的狗都有相同颜色，并且集合 X 和 Y 含有相同的狗，所以 $Q=X\cup Y$ 中所有的狗颜色必须相同．由数学归纳法原理可知，命题 p_n 对任意自然数 n 均成立，即世界上所有的狗颜色都相同．

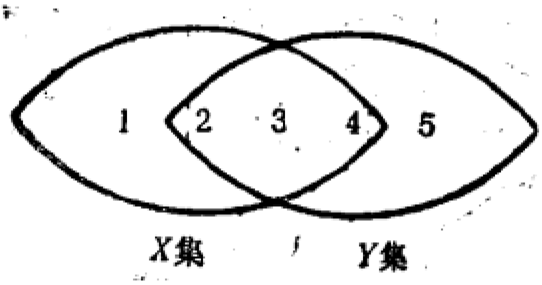


图 14

读到这里，请读者仔细检查一下以上证明，找一找错在哪里．如一时思考不出，再往下看．

众所周知，数学归纳法有两个步骤．第一步先证明对某个自然数 n_0（通常是 $n_0=1$）命题成立，这是归纳的基础．第二步证明由 p_k 成立推出 p_k+1 成立．这是得到一种递推关系．有了它就能由 n_0 成立推出 n_0+1 成立，由 n_0+1 成立推出 n_0+2 成立，……直至推出大于 n_0 的任意自然数 n 成立．初学者往往对证明的第二步比较重视，而对证明的第一步不重

视，或者只是形式主义地验证一下，认为这无关紧要。而上面的证明问题恰恰就出在这第一步。因为第二步证得的递推关系成立的前提是，Q能够分成两个含有相同狗的集合X和Y，而Q至少应含有3只狗才能分成这样的两个集合的并集，这时集合X和Y分别是两只狗组成的集合。所以，第一步必须对$n=2$加以验证，才能真正构成归纳的基础，而p_2恰恰不成立。

这个例题，如能提高你对数学归纳法的第一个步骤的认识，那就进一步显示了构造反例在数学学习中的作用。

简单地说，数学发现主要是提出证明和构造反例。欲证明一个命题是错误的，只要举出一个反例就够了。例如式子$F(n)=2^{2^n}+1$，当$n=0,1,2,3,4$时都是质数。数学家费尔马据此猜想：对于任何自然数n，$F(n)=2^{2^n}+1$的值都是质数。可是，$F(5)=2^{2^5}+1=641\times6700417$已不是质数，于是结论被推翻，从这种意义上说，构造反例乃是数学证明中的一支奇兵，如能恰当运用，常能收到出奇制胜的效果。

六、类比给你智慧

据说，笛卡儿在观察蜘蛛织网时产生了灵感，因而发明了直角坐标系．蜘蛛网由经线、纬线编织而成，凭借这些经纬线蜘蛛能爬到网的任意位置．于是，笛卡儿就用无数条平行线和垂直线织成了坐标网，建立起点与有序数对之间的对应关系，从而在数与形之间架起一座桥梁．

笛卡儿运用的是一种称为类比的思维方法．所谓类比法是这样一种推理：根据A、B两个不同对象具有某些相似的性质，而且已知A还具有其他性质，由此推出B也具有其他相似的性质．它可以用公式表示如下：

根据：$\begin{cases}\text{对象}A\text{具有性质}a、b、c、d；\\ \text{对象}B\text{具有性质}a'、b'、c'.\end{cases}$

其中a'、b'、c'分别与a、b、c相同或相似

推论：对象B可能也具有性质d'．

由类比法推得的结论可能真，也可能假，要从逻辑上作进一步论证，但类比法确能启迪思维、激发灵感．

倘若要一个对立体几何不熟悉的学生，求长宽高分别为a、b、c的一个长方体的对角线长l，如果一时不知从何着手，老师只要提示一句：平面几何中有什么类似的问题？他很快会想到求长方形的对角线问题．根据勾股定理，可由长方形的长与宽求得对角线．如图15所示，连接AC，$A'C'$，可以发现，AC'正好是长方形$ACC'A'$的对角线，只要求出

AC，问题就可解决．而 AC 又恰巧是长方形 $ABCD$ 的对角线．于是 $AC^2=a^2+b^2$，$l^2=AC'^2=AC^2+CC'^2=a^2+b^2+c^2$，$l=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$．

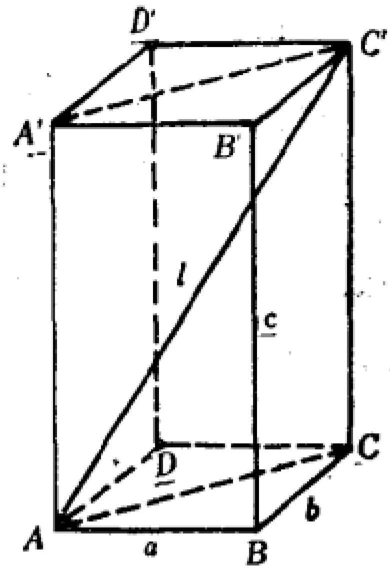


图 15

在解这个问题时，用长方形来类比长方体帮了我们的忙。

我们知道，在所有具有等周长的平面曲线中，圆的面积为最大。由此可以推得，在所有具有等表面积的几何体中，以球体积为最大．圆和球都是对称性很好的几何图形．运用类比推理我们可以推测，不等式 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，当右边为定值时，只有在 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时（也是一种对称性），$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ 取得最大值，即等号成立．运用类比启发思想的例子还可举出很多．值得一提的是，早在17世纪，数学界对无穷级数（把无穷数列的各项依次用加号连接起来得到的式子 $a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$ 称为无穷级数)还研究得很少，著名数学家雅可比·贝努里不会计算无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\cdots$$

的值，于是请求援助．最后欧拉用三角函数方程和代数方程作类比，求出了它的值为 $\frac{\pi^2}{6}\approx1.645$（详细过程可查阅鲁又文编著《数学古今谈》中的“欧拉的功过”一节）．尽管这个解法用现在的观点来看并不严格，但毕竟得到了正确的

答案。这件事至今仍被数学界传为美谈。

当然，类比方法也有它的不足之处。不同的研究对象之间存在的相似性是类比法的客观基础，而对象之间的差异性却限制了类比的范围和结论的可靠性。在任何两个相似的事物之间，总有一定的差异，不可能一切方面都相似。根据相似属性进行类比时，所推论出的属性如果正好是事物的差异性，则结论自然是错误的。例如对任意有限项进行代数和运算时满足结合律，如果我们把这一性质推广到无限项的运算中，则有

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\\+\cdots=0;$$

$$1-1+1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-\\-(1-1)-\cdots=1-0-0-0-\cdots=1.$$

为什么会出现这种奇怪的现象？这是因为我们用类比法推论出的性质正好是有限与无限的差异性。为了更加科学地使用类比法，我们在进行类比推理时应当注意下面两个原则。第一，类比所根据的相似属性越多，类比的应用也就越为有效。这是因为两个对象的相似属性越多，意味着它们越接近，这样去推测其他的属性相似也就愈加合乎实际。第二，类比所根据的相似属性之间越是相关联，类比的应用也就越能成功。因为类比所根据的许多相似属性，如果是偶然的并存，那么推论所依据的就不是规律性的东西，而是表面的联系，结论就不大可靠。如果类比所依据的是现象间规律性的东西，那么推得结论的可靠性程度就较大。

类比法虽然有一定的局限性，但它仍然是一个极富创造性的方法。正如大哲学家康德所说："每当理智缺乏可靠论证的思路时，类比这个方法往往能指引我们前进。"

七、试验、归纳是猜想的源泉

试验、归纳不仅是物理、化学、生物学等自然科学经常使用的方法，而且也是数学中一个重要的方法．著名的哥德巴赫猜想的发现过程就是一个很好的例证．哥德巴赫（Goldbach，1690—1764）原是一位德国教师，后来在彼得堡科学院工作，为该院院士．他在研究正整数性质时，发现了下面的事实：

$4=2+2$，$6=3+3$，$8=3+5$，…，$30=13+17$，…

等式左边 4，6，8，…30，… 都是偶数；右边各项 2、2；3、3；3、5；…；13、17；…都是两个质数．哥德巴赫通过对以上事实进行归纳研究，猜想“任何大于 2 的偶数都可表示为两个质数之和”，可用简化的方法表示为(1＋1)．由于他自己不能证明这个结论，便写信求教于欧拉．欧拉认真研究了这个命题后，回信给哥德巴赫说：“虽然我还不能证明它，但我确信这是一个完全正确的定理”．由于欧拉在数学界的崇高声望，这个问题立刻吸引了许多数学家为发现其证明而苦苦求索．然而经过 200 多年的努力，这个问题至今仍未解决．1966年，我国数学家陈景润证明了命题(1＋2)，即“任何大偶数可表示为一个质数及一个不超过两个质数的乘积之和”．（论文发表于 1973 年）这是世界上关于哥德巴赫问题的最佳结果，离最后结果(1＋1)还差一步，被国外数论专家称之为“光辉的顶点”，并誉为“陈氏定理”．

哥德巴赫提出猜想时所运用的方法是归纳法．所谓归纳

法，是从个别到一般，从一些个别事实中进行概括总结，抽象出一般的结论、原理、公式等的方法。

归纳法根据它所概括的对象是否完全，分为完全归纳法和不完全归纳法两大类。完全归纳法是在完全研究了所要研究的一切对象之后，概括出一般性结论的推理方法。由完全归纳法得到的结论是绝对可靠的。

［例 1］ 在圆中研究同弧上的圆周角与圆心角之间的度量关系时，根据圆心与角的位置关系有下面三种情况：圆心

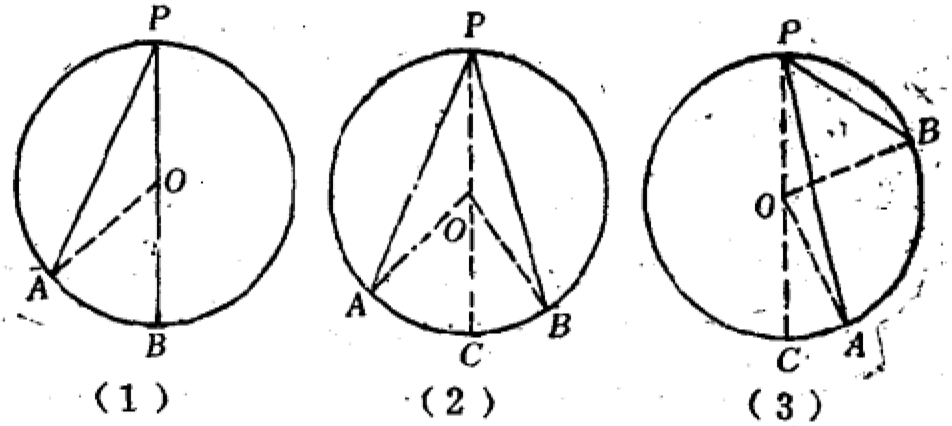


图 16

O在$\angle APB$的一条边上，如图16-(1)；圆心O在$\angle APB$的内部，如图16-(2)；圆心O在$\angle APB$的外部，如图16-(3)。在图16-(1)中容易证得$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$，在图16-(2)中，$\angle APB=\angle APC+\angle CPB$，等式右边的每一个角都是图16-(1)中的角，因而可得$\angle APB=\frac{1}{2}\angle AOB$，在图16-(3)中，$\angle APB=\angle BPC-\angle APC$，$\angle BPC$、$\angle APC$都是图16-(1)中的角，因而可证得$\angle APB=\frac{1}{2}\cdot\angle AOB$。这就证得了一般的结论：圆周角等于同弧上的圆心

角的度数的一半。

完全归纳法只有在所研究的对象中所含元素不太多的情况下，才可能办到。在数学中，往往由于被考察的对象含有无限多个元素，不可能全部举出。即使所含元素有限时，往往因为数量太大，也不容易一一举尽，因而采用完全归纳法有困难。这时人们常采用另一类归纳法，即不完全归纳法。所谓不完全归纳法，是人们根据对某一对象中的部分元素所具有的某种共同属性的认识，概括总结出这一对象都具有这种属性的一般性结论。例如哥德巴赫根据“许多偶数都可写成两个质数的和”这一事实，断定“任何大于2的偶数都可表示为两个质数的和”，用的就是不完全归纳法。我们再看一个例子。

［例 2］ 由100个数排成一个方阵，每一横行10个数，每一纵列10个数。在每一横行中选取一个最小的数（如果有n个数相等，则任取一个）。再从选出来的10个数中取其中最大的一个数。另一方面，在每一纵列中选取一个最大的数，再从选取出来的10个数中取最小的一个数。试比较，用这两种方法选取的两个数中，哪一个大？

解 100个数排成的方阵相当复杂，为了便于研究，不妨先取4个数、9个数进行试验，看看可能会有什么样的答案（见图17）。

如果设从小的数中挑出的大数是A，从大的数中挑出的小数是B，通过上面的试验，可以猜想结论为：$A\leqslant B$。这个由试验归纳得到的结论是否正确呢？需要进一步证明。

设C是位于A所在横行与B所在纵列交叉位置处的数。

$\because$ A是自己所在横行中最小的数 $\therefore$ $A\leqslant C$

$\because$ B是自己所在纵列中最大的数 $\therefore$ $C\leqslant B$

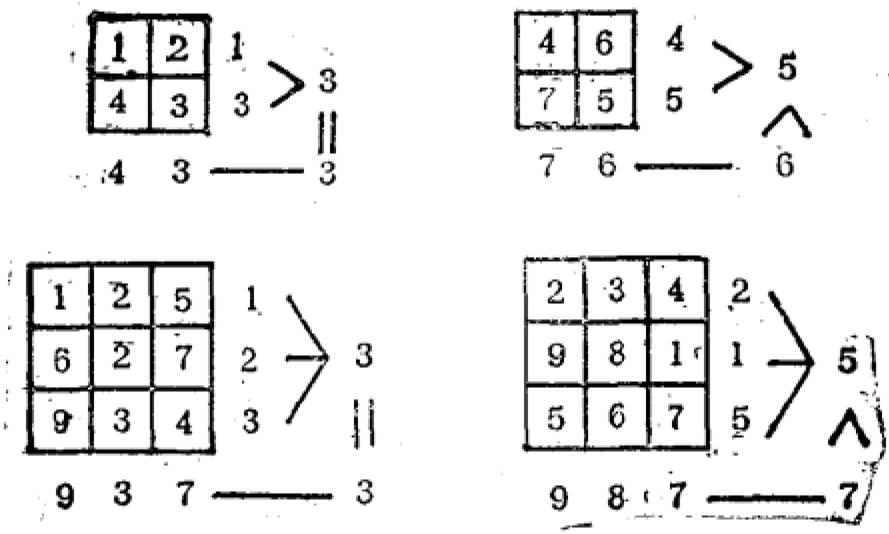


图 17

故 $A \leqslant B$ 成立。

不难看出，这个结论推广到由 $m \times n$ 个数排成的一个矩形方阵也成立。实际上，这就证得了对策论中的最大最小值定理。

通过试验、归纳得出猜想，从而导致数学发现的事例还可举出很多。譬如著名的质数分布定理：从 1 到任何自然数 N 之间所含有质数的百分比，近似等于 N 的自然对数的倒数，N 越大，这个规律就越精确；费尔马小定理：不论 m 是什么整数，只要 p 是质数，$m^p - m$ 就能被 p 整除。这些都是从大量的试验数据中归纳总结出来的规律。不过，值得注意的是，由不完全归纳法得出的结论常常是不可靠的。例如数学家费尔马根据 $n=1, 2, 3$，等数时，式子 $\varphi(n)=n^2+n+41$ 都是质数，因此设想用二次三项式 $\varphi(n)=n^2+n+41$ 来表示质数。可是他失败了。不难证明，虽然当 n 为从 1 到 39 所有整数时，$\varphi(n)$ 的值都是质数，但是 $n=40$ 时，

$$\varphi(40)=40^2+40+41=41\times 41$$

是合数。

通过这位著名数学家的教训，可以看到不完全归纳法有其局限性。绝不能只根据对一些特殊情形的判断，马上过渡到一般情况的结论，并将其作为定理或法则。这是因为归纳法的客观基础在于事物所具有的个性和共性的对立统一关系。虽然共性存在于个性之中，个性中有的性质为全体所共有，但是确有某些性质只存在于个别对象或部分对象之中。这就决定了从个性中概括出的一般性结论不一定都能反映事物的共性。因此，由不完全归纳法得出的一般性结论，不一定都可靠，还必须经过周密的研究，并且给予严格的数学论证，或者成为定理、法则，或者因为错误而被否定。

八、逐步逼近法

钳工师傅用平锉锉成一个圆形工件，总是先锉成一个多边形，再把每个角锉去，得到一个边数加倍的多边形，这样继续锉下去，多边形的边数越来越多，各边的长越来越短，多边形就越来越接近圆。锉到一定程度，我们就算它是圆形的了，如图 18 所示。

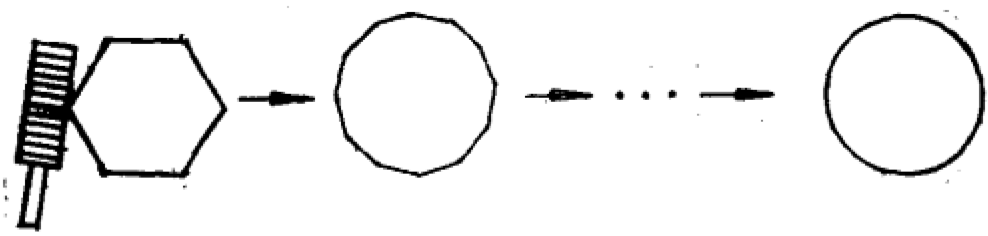


图 18

我们用天平秤物体的重量，总是先把物体放在天平的左盘中，然后根据估计在右盘中放入砝码若干。如果右盘下沉，则将砝码去掉少许，如果砝码减少过多，放物体的左盘又会下沉，则再在右盘中加入适量砝码。如此经过几次调整后，天平就会平衡，从而称出物体重量。

上面所用的方法就是逐步逼近的方法，我们常称为逐步逼近法。逐步逼近是数学中非常有用的一种方法。譬如，一些较为复杂的方程，可以用逐步逼近法求得近似解，甚至在函数未知的情况下也能求得该函数的最大值、最小值。

［例 1］ 求太湖的最深深度。

我们先在地面上取定直角坐标系 $o-xy$，并取向上方向

为 z 轴正向。设湖底深度可用函数 $z=f(x, y)$ 表示。用一测量船，上面装有测定深度的仪器，可以测得每一点湖的深度，也就是说可以算出 $z=f(x, y)$ 在任意一点 $(x、y)$ 的函数值。

如图 19 所示，设测量船从湖边某一点 A_1 出发，船应该往哪个方向开好呢？当然应向着湖中心方向开去。但是茫茫太湖大无边际，一眼看不到对岸，无法判断哪个方向指向湖中心。如果碰运气盲目地航行，不知何时才能测出最深点，当然不可取。一个自然的想法是退而求其次，虽然不能保证测量船直指湖中心，但应尽量使船逐步开往深处，这样尽管航行的路线会有些迂回曲折，但最后总能逐步到达最深点。

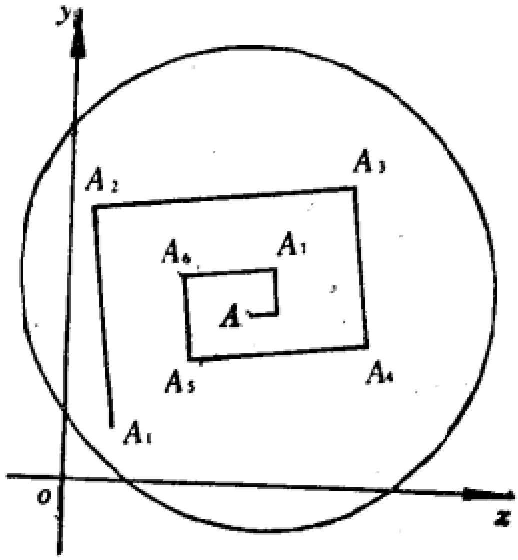


图 19

按照这种想法，我们首先测出出发点 $A_1(x_1, y_1)$ 和邻近两点 $p_x(x_1+\Delta x, y_1)$，$p_y(x_1, y_1+\Delta y)$ 的函数值，并计算出

$$\alpha_1=\frac{f(x_1+\Delta x, y_1)-f(x_1, y_1)}{\Delta x},$$

$$\beta_1=\frac{f(x_1, y_1+\Delta y)-f(x_1, y_1)}{\Delta y}$$ 的值，从而近似地

求出 p_1 点的梯度向量 (α_1, β_1)。注意到与梯度向量 (α_1, β_1) 相反的方向就是湖深不断增大的方向。因此，应让测量船沿与 p_1 点的梯度向量相反的方向往前开，每隔一定距离测量一次湖的深度。如果后一点测得的深度比前一点深，测量

船就继续往前开．直至某一点测得的深度比前一点浅时，船就退回到前一点，设该点为 $A_2(x_2, y_2)$．这时，我们就由A_1点前进到了 A_2点．

然后重复上面的过程，近似求出 A_2 点的梯度向量 (α_2, β_2)，测量船沿这个梯度向量的相反方向朝前开，一边开一边测量，一直到沿这个方向上的最深点停下来，设该点是 $A_3(x_3, y_3)$．这样，测量船依次开到 A_4 点，A_5 点，……若干步以后，测量船几乎就在某一点 A 附近转圈．因此，这个 A 点就是太湖的最深点．由此可以测得太湖的最深深度 $f(x^*, y^*)$．

以上讲的其实就是求多元函数极值的最速下降法的一种形象化说法．

如果让你解决一个比较复杂的问题，并且一下子又不能加以解决，这时你不妨将原问题转化为 n 个按一定顺序串联起来的但比较容易解决的问题，这些问题一个比一个更加逼近原来的问题．接下来你就集中精力解决这些转化得到的问题．随着这些问题的顺次解决，你也就按逐步逼近的方法得到了原来问题的答案．譬如在“反其道而行之”一节中，我们在证明“如果所有周长相等的平面图形中，存在面积最大的图形，则该图形一定是圆”时，就是将问题分解成三个小问题：（1）如果图形F是周长相等的平面图形中面积最大的图形，则F一定是凸图形；（2）如果图形F是周长相等的平面图形中面积最大的，则F必定有一条弦，同时将F的周长和面积平分；（3）图形F必定是圆．这三个问题一个更比一个逐步逼近原题的结论．

逐步逼近法在数学中应用非常广泛．例如求圆面积时，我们用边数逐渐增加的内接多边形来逐步逼近：求曲线弧长

时，我们用越来越小的线段组成的内接折线来逐步逼近；对于无理数，我们用一列精确度越来越高的十进小数来逐步逼近；等等。其实，逐步逼近法不仅适用于数学，它对任何科学研究都是卓有成效的。天文学家开普勒发现行星运动三定律用的也是逐步逼近法。他根据对第谷的观察资料进行分析，初次假设太阳绕地球旋转，与观察不符；第二次假设火星绕太阳作圆周运动，仍有相当偏差；最后假设火星绕太阳作椭圆运动，终于得到了正确的结论。

除了少数例外，科学上的许多重大发现、发明都是按逐步逼近的过程进行的。遗憾的是，我们一般只能看到最后的、成功的结果。而那些逐步逼近的过程则从不公布，这是非常可惜的，因为正是在这些被逐步抛弃的中间假设中蕴藏着许多经验教训和无数个不眠之夜。这或许也是某些人对科学家产生迷信，认为他们都是超级天才，非常人所能望其项背的一个重要原因。

九、把问题引向极端

有些数学问题结论若明若暗，需要我们在研究过程中逐步探明。如果采用通常的“执果索因”的分析方法和“由因导果”的综合方法很难奏效，这时不妨考虑问题的极端情形。因为当一个问题被推向极端，或处于极限情况下，常常能丢弃一些不确定的因素，提高问题结论的确定性，并能使问题中隐含的某些性质得到放大从而易于显露出来，有助于我们明确解题方向，发现证明方法。

〔例1〕 求证等边三角形内任意一点到三边的距离之和是定值。

解 这个问题的特点，在于定值的具体内容题中未作明确交待。因此，首先弄清这个定值的数量指标，就可以启发我们的思维。既然P是三角形内任意一点，不妨假设P处于顶点A这样一个极端位置（见图20）。这时，P点到BC边的距离就是BC边上的高，P点到其余两边AB、AC的距离均为零。因此，P点到三边的距离之和就等于这个等边三角形一边上的高。因为等边三角形内任意一点到三边距离之和是定值，所以这个定值就等于该等边三角形的高。

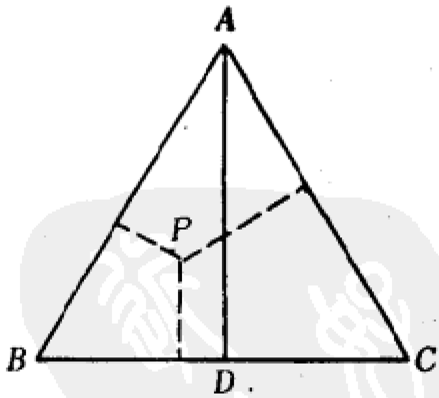


图 20

由于高与距离都是与三角形面积有关的线段，因此可以

尝试通过面积来证明。如图 21，设 P 是等边三角形 ABC 内任意一点，三角形的边长为 a，高为 h，PD、PE、PF 分别是三边上的高，连结 PA、PB、PC，则

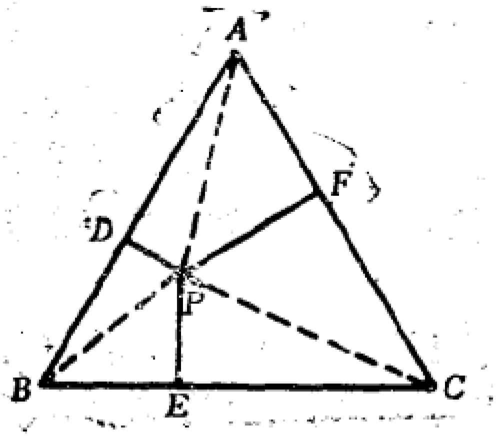


图 21

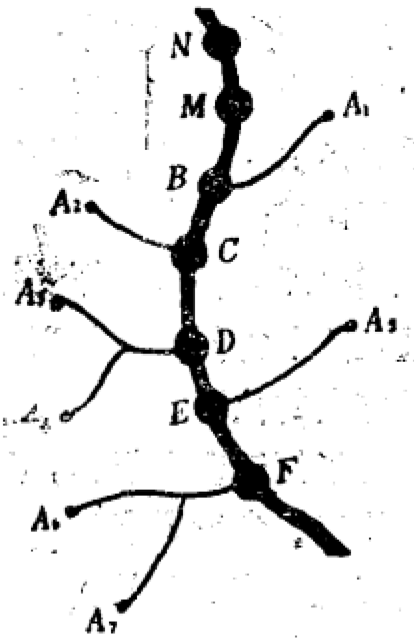


图 22

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PBC}+S_{\triangle PCA}$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot PD+\frac{1}{2}BC\cdot PE+\frac{1}{2}CA\cdot PF$$

$$=\frac{1}{2}a\cdot(PD+PE+PF)$$

而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}a\cdot h$

$\therefore\quad PD+PE+PF=h$.

这就证得等边三角形内任意一点到三边距离之和等于定值 h.

［例 2］ 图 22 是一个工厂区的线路图。一条公路（粗线）贯穿这个地区，七个工厂 A_1、A_2、… A_7 分布在公路两

侧，由一些支路（细线）与公路相连．现在，要在公路上设个汽车站，使车站到各工厂（沿公路及支路走）的距离总和越小越好．试问这个车站应设在什么地方最好．

解　因为已知汽车站必须设在公路上，所以问题的解的范围是图中粗线．根据车站到各工厂距离总和最小的要求，如果公路上的一点M到各工厂距离总和比公路上另一点N到各工厂距离总和小，就说明车站设在M点比设在N点好．这是判别公路上各点好坏的标准．B、C、D、E、F把公路分为六段，为了方便，我们通过比较每段中任意两点的好坏来确定最好点的位置．

为了便于发现规律，我们先讨论最南段和最北段这两种极端情况．考察B点以北的情形．如图，设M、N是B点以北的任意两点．显然，从M点到各工厂的距离总和要比N点到各工厂的距离之和小$7MN$，因此M点比N点好．从而可推知B点比B以北各点都好．同理可得F点比F以南各点都好.因此最好点必在BF段上,并可发现规律：靠近工厂多的点比靠近工厂少的点好.在BC段上，C点比B点好.因为C到A_1的距离虽然比B到A_1的距离多BC一段，但C到其他工厂的距离总和却减少$6BC$．由此可得在BC段上，C点最好．仿此可推得EF段上E点最好，CD段上D点最好，DE段上D点最好．最后可求得D点就是整个公路上的最好点．至于如何证明，其实在上面的推导过程中就已经包含了证明．

我们在讨论数学问题的过程中，不可避免地常常会导出一些错误的结论．这种把问题引向极端的方法还能帮助我们发现错误的命题．

［例3］　设$\triangle ABC$的内切圆半径为r，外接圆半径为R，

最长的高为 h．如果$\triangle ABC$是等边三角形（见图 23），它的三条高一样长，且内心、外心与垂心重合，因此有

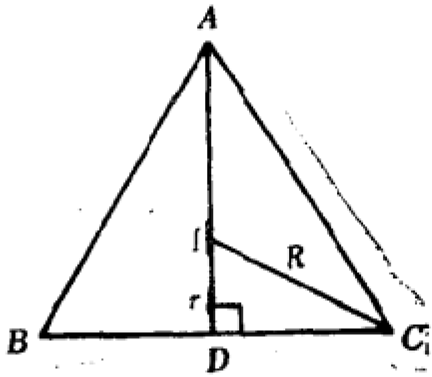


图 23

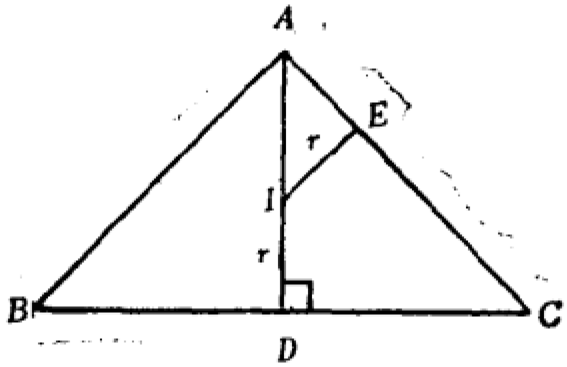


图 24

$$r=\frac{h}{3},\qquad R=\frac{2h}{3}$$

$$\therefore\quad r+R=\frac{h}{3}+\frac{2h}{3}=h.$$

如果$\triangle ABC$是等腰直角三角形（见图 24），直角边就是最长的高，斜边就是外接圆的直径，内心 I 在斜边的高 AD 上．

$\because$ $\triangle EAI$ 也是等腰直角三角形 $\therefore$ $EA=EI=r$

显然 $EC=DC=R$ $\therefore$ $h=AC=EA+CE=r+R$.

有人由此猜测：对任意三角形，均成立 $r+R=h$. 这个猜测是否正确？

我们考虑等腰三角形，当顶角 $A\to 0^\circ$ 时的极限情况，如图 25-（1）所示，当 $A\to 0^\circ$ 时，$BC\to 0$. 这时

$$r\to 0,\qquad R\to\frac{h}{2}.$$

$$\therefore\quad r+R\to\frac{h}{2}<h.$$

故以上猜测不能成立。

那么能否将结论修改为：对任意三角形均成立 $r+R \leqslant h$？

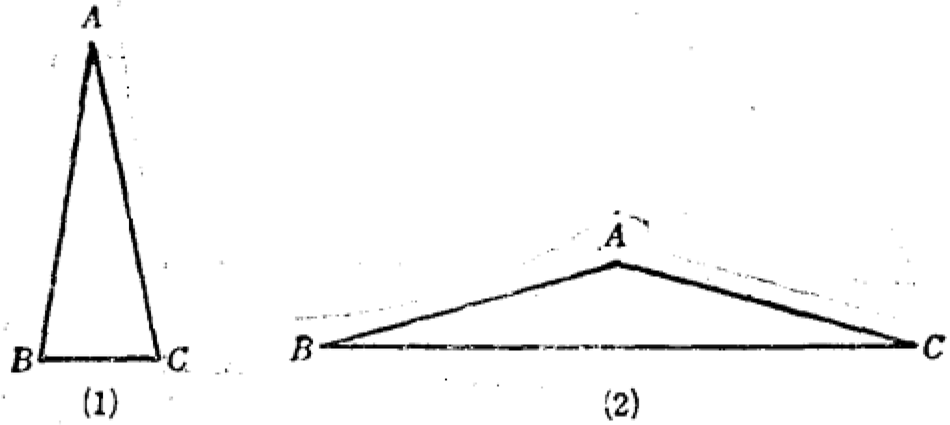


图 25

我们再考察当顶角 $\angle \to 180°$ 时的等腰三角形，如图 25-(2)所示。随着顶角越来越接近平角，$\triangle ABC$ 的三条高越来越接近于零，即 $h \to 0$，并且 $r \to 0$，$R \to +\infty$。

这时 $r+R \leqslant h$ 显然不能成立。

上面这种把问题引向极端的思考方法，对于解某些有关定值问题，有关直线的定向问题，直线通过定点的问题，定圆切线问题，以及不等关系问题都是一种颇为有效的方法。

十、横看成岭侧成峰

著名诗句"横看成岭侧成峰，远近高低各不同"惟妙惟肖地描绘了庐山奇峰的千姿百态。其实数学世界里也有这种奇异的景象。

有的数学问题，直接看是一个代数问题，换一个角度看就成了三角问题，再换一个角度看也许就成了几何问题。

［例 1］ 设 a、b都是实数，并且 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$，求证 $a^2+b^2=1$。

证一　这显然是一个代数问题．由基本不等式 $xy\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，其中等号仅当 $x=y$ 时成立，可得：

$$a\sqrt{1-b^2}\leqslant\frac{a^2+(1-b^2)}{2} \quad (1)$$

$$b\sqrt{1-a^2}\leqslant\frac{b^2+(1-a^2)}{2} \quad (2)$$

两式相加得： $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}\leqslant 1$

而 $a\sqrt{1-b^2}+b\sqrt{1-a^2}=1$.

由（1）、（2）式取等号的条件可得 $a^2+b^2=1$.

证二　由已知条件不难发现 $|b|\leqslant 1$，$|a|\leqslant 1$，并且求证的式子 $a^2+b^2=1$ 与熟知的三角恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 结构相似。因此可设 $a=\sin\alpha$，$b=\sin\beta$，α、β 都在区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\right.$

$\left.\frac{\pi}{2}\right]$内，于是原问题被转化为一个三角问题．余下的证明读者不难自己完成．

证三 倘若读者熟悉平面几何的托勒梅定理：圆内接四边形两组对边乘积之和等于对角线的乘积．而把 a，$\sqrt{1-b^2}$，b，$\sqrt{1-a^2}$ 分别看作是一个内接于直径为 1 的圆的四边形的边长，并且四边形的两条对角线均为直径，如图 26．于是一个简捷而又漂亮的几何证法就会呈现在你的面前．

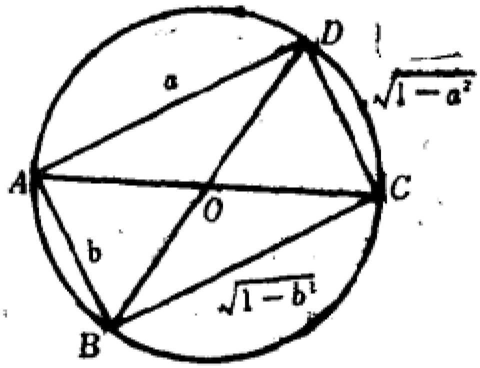


图 26

人们经常习惯于按照固有的知识或经验来思考问题，因此，在遇到一个新问题时，常常会有这样或那样的思想框框障碍自己的思路，这就是所谓思维定势．例如一条船顺水而下，通过一座桥洞时，发现货物装得高了一点，约高出 2 厘米，无法通过．如果卸掉一些货物吧，无奈货物是整装的，一时无法卸下．有什么办法能够不卸货，使船通过桥洞呢？

其实办法很简单，只要在船上加些石块，使船下沉几厘米，就可以从桥下通过了．一些人所以想不出这个办法，是由于人们不希望把无用的石块装在船上这一思维定势在起作用．

法国科学家贝尔纳说过："构成我们学习的最大障碍是已知的东西，而不是未知的东西．"当然，这不是知识和经验本身的过错，而是我们应该对已有的认识的障碍作用，要有清醒的估计，使自己能够自觉地克服思维定势的消极影响，学

会从不同的角度来分析同一个数学问题，这有助于我们克服思维定势，提高思维的灵活性。

变换看问题的角度，不但能使我们获得一题多解，有时还能使一个比较繁难的问题变得容易解决。

［例2］ 求1至100的各个整数中不能被5整除的所有数的和。

要直接求出1至100各整数中不能被5整除的各数之和S_1，是相当麻烦的。如果考虑到1至100各整数的和S容易求得，并且1至100中能被5整除的各数是

$$5, 10, 15, \cdots, 100$$

它们的和S_2也很容易求得。于是，我们可把求S_1的问题转化为求S_2，然后由$S-S_2$就可得到S_1。这样解题显然要简便得多。

［例3］ 已知a、b、c是互不相等的实数，求证

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$$对于一切实数x都成立。

按通常证明等式的方法，通过把左边进行化简来证明，虽然可行，但运算很繁，如果将原式变形为：

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}-1=0$$

并且设上式的左边为$f(x)$，则原来的等式就转化为关于x的一元二次方程$f(x)=0$。

容易观察出：$f(a)=f(b)=f(c)=0$。

因为a、b、c是不相等的实数，所以一元二次方程$f(x)=0$有三个不相同的根。

根据定理“一元n次方程至多只有n个不相同的实数

根"，所以得到 $f(x)$ 恒等于零，从而证得原等式对一切实数 x 成立。

变换看问题的角度，有时还会将我们引入一个全新的数学天地。

〔例 4〕 当 $|x|<1$ 时，$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots=\frac{1}{1+x}$ 这是一个中学生熟知的无穷递缩等比数列的求和公式。倘若我们换一个角度看这个式子，即从右往左看，则上式就成为

$$\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$$

这个等式告诉我们，式子 $\frac{1}{1+x}$ 可以展开为一个无穷递缩等比数列的和，也就是说将一个有限的式子展开成无穷多项的和。把无穷多项 $u_1(x)$，$u_2(x)$，…，$u_n(x)$，…用加号连接起来的式子 $u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$ 称为无穷级数。上式的右边就是一个无穷级数。联想到二项展开式

$$(1+x)^n=1+\frac{n}{1!}x+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots+x^n \quad n\text{是自然数}$$

如果在等式的右边添加无穷多个系数为零的项：$0\cdot x^{n+1}$，$0\cdot x^{n+2}$，…则右边也可看成是一个无穷级数。

既然指数是自然数时，是 -1 时，都可以展开为无穷级数，那么对于任意实数 α，$(1+x)^\alpha$ 能否展开为无穷级数？这个猜想完全合理。只要稍许运用一些微积分知识就可得到下面的展开式：

$$(1+x)^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

$|x|<1$，α 是任意实数

这个式子的结构完全类似于中学里的二项展开式。

循此思路，我们还可以将初等函数展开为无穷级数。

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots \quad x\in R$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots \quad x\in R$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \quad x\in R$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots \quad |x|<1$$

$$\text{arc tg}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots \quad |x|<1$$

无穷级数是高等数学里非常重要的内容。只是改变一下看问题的角度，就把我们由一个普通的求和公式引入到一个丰富多采的无穷级数领域。你说奇妙不奇妙。上面这些展开式对于深入研究初等函数的性质和进行数值计算非常有用，在后面的“有限与无限”一节里我们继续讨论这个问题。

十一、不进则退

有一位老师，为了辨别出三个聪明的学生中哪一个更聪明，事先准备好5顶帽子，其中3顶白的，2顶黑的。他先把这些帽子让学生们看了一看，然后要他们闭上眼睛，替每个学生戴上一顶帽子，并且把余下的2顶帽子藏了起来，最后让他们张开眼睛，请他们说出自己头上戴的帽子，是白的还是黑的。

三个学生相互看了一下，犹豫了一会儿，然后他们异口同声地说，自己头上戴的帽子是白色的。

他们的回答是否正确？如何才能从别人头上戴的帽子颜色推断出自己头上帽子的颜色？读到这儿，请读者先想一想，如果一时想不出来，不妨退一步，不考虑三个人，而仅仅考虑两个人一顶黑帽子（白帽子不少于2顶）的问题。这个问题简单得谁都会解，黑帽子只有一顶，某甲戴了，某乙立刻会说："自己戴的是白帽子"。但是，某乙看到对方的帽子要犹豫，可见某甲戴的是白帽子。同样可推出某乙戴的也是白帽子。循此思路，再来解决"三个人两顶黑帽子"的问题也就不难了。

甲、乙、丙三个学生可这样思考：如果我(不妨设为甲)头上戴的是黑帽子，则乙一定会这样想：倘若自己头上是黑帽子，则丙会脱口而出地说出自己头上是白帽子。但丙在犹豫，可见自己(指乙)头上是白帽子。如果这样，乙也立刻可推得自己头上是白帽子，而他也在犹豫，可见自己（指甲）头上

戴的不是黑帽子，而只能是白帽子。

倘若把问题搞得再复杂一些："四个人，三顶黑帽子，不少于四顶白帽子"，或者一般地，"n 个人，$n-1$ 顶黑帽子，不少于 n 顶白帽子"，同样可用以上的方法加以解决。

因此，数学家华罗庚说：善于"退"，足够地"退"，"退"到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍！所谓善于"退"，就是根据题目的特点采取正确的退法。从较强的问题退到较弱的问题就是一个常用的方法。当我们面临一个困难问题无从下手时，可考虑去掉某一个（或几个）限制条件，或把某一个（或几个）条件放宽，从而把原来较强的问题转化为一个较弱的问题。在很多情况下，解决一个较弱的问题要比解一个较强的问题来得容易。因而可以把较弱问题的解决作为跳板，引导到原来问题的解决。

［例 1］ 在已知的锐角三角形 ABC 中，求作一个正方形 $DEFG$，使点 D、E 在边 BC 上，点 F、G 分别在边 AC、AB 上。

解 要作一个正方形，使四个顶点分别在已知三角形的三条边上，一下子很难办到。那么，能不能放宽要求，只要求三个顶点在三角形的边上，对第四个顶点（譬如 F 点）不作限制？这样的正方形很容易作出，如图 27 中的正方形 $D'E'F'G'$。不难看出，这样的正方形可以作出很多个，而且你果真作出几个这样的正方形后，将会发现所有这些正方形的第四个顶点都和 B 点位于同一条直线

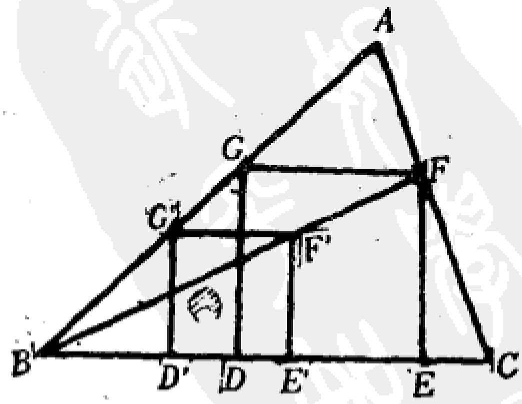


图 27

上。因此只要连接BF'，并延长BF'交AC边于F点，然后作$FG \parallel BC$，$FE \parallel F'E'$，分别交AB、BC边于G、E点。再作$GD \parallel G'D'$，交BC边于D点，则正方形$DEFG$就是所要求作的正方形。证明留给读者自己完成。

从抽象退到具体也是一个有效的方法。对于一个非常抽象的问题，解答往往比较困难。这时，不妨先把它退为一个比较具体并且容易解决的问题，然后把解具体问题获得成功的经验推广到一般情况。

［例2］ 设符号$F(N)$表示正整数N的因数的个数。例如2有两个因数1和2，记为$F(2)=2$；6有四个因数1，2，3，6，记为$F(6)=4$。已知p_1，p_2，…，p_n是n个不同的质数，$N=p_1p_2\cdots p_n$，求$F(N)$。

因为问题太抽象，不妨先讨论一些具体的情况，以便从中发现规律。

最小的质数是2，已知质数有两个因数1，2；$F(2)=$ $=2$；

两个质数2、3的积2×3有四个因数1、2、3×1和2×3，于是$F(2\times3)=4$；

三个质数2、3、5的积$2\times3\times5$有八个因数1、2、3、2×3和5×1，5×2，5×3，$5\times2\times3$，于是$F(2\times3\times5)=8$。

至此，你可能已经发现，每添加一个质数，除了前面已有的各个因数，新添加的质数分别乘以已有各个因数，即为所增加的新的因数。因此，因数的个数是原来因数个数的2倍。于是推广到n个不同的质数时有

$$F(p_1p_2\cdots p_n)=2^n.$$

把复杂的问题退到简单的问题，也是我们经常采用的思考方法。对于某些比较复杂的问题，我们常常在不改变问题

实质的前提下，先把它退为一个较简单的问题，甚至退到最原始的地方，从而探索出最终解决复杂问题的思路．

〔例 3〕 用 1，2，3，4，5，6，7，8 这八个数字组成两个四位数，使它们的积最大，其中每个数字都要用上．

我们先讨论一个简单而又不改变原来问题实质的问题：用 1，2，3，4 四个数字组成两个两位数，使它们的积最大．显然，十位数字应取较大的数字 3 和 4，这样得到的两位数有两种可能：41 和 32，或者 42 和 31．不难验证，$41\times32>42\times31$．进一步探究以上不等式成立的依据何在．注意到41与 32；42 与 31，它们的和相等；但是前一对数比后一对数更加靠近，因此可以猜测，如果两个数的和为定值，它们越靠近，其积则越大．不妨设 $x+y=k$（定值），$x-y=d$（变数），可以求得$xy=\frac{1}{4}(k^2-d^2)$．因此，$|d|$越小，则 xy 越大．这就证明了上面的猜测是对的．于是可以根据下列原则逐步写出所要求的两个四位数．

1．较大的数字尽量靠左排；

2．两个要添加的数字，其中较大的数字应附在较小数的右面

于是可得：

$$\begin{matrix}8 & & 85 & & 853 & & 8531\\ & \to & & \to & & \to & \\ 7 & & 76 & & 764 & & 7642\end{matrix}$$

8531 和 7642 就是所求的两位数．

对于这个问题，如果退到只考虑用 1，2 两个数字组成两个一位数，问题虽然更为简单，但已失去原来问题的实质，因而退过了头，从而不能引导到原来问题的解决．这也

是必须引起注意的一个问题.

除了上面三种退法外，还可采取从一般退到特殊，从整体退到部分，从新问题退到老问题等思考方法.

当然，我们也不能完全排斥步步前进的解题方法，退的目的仍是为了进.

十二、见异思迁

一个科学原理或方法往往能跨越学科之间的界限，给人以启迪。生物学家达尔文受到马尔萨斯人口论的启发，因而创造了生存竞争、适者生存的生物进化理论。语言学家乔姆斯基本来是学数学的，他把数学中的递归方法移植到语言学中，提出短语结构规则，从而推动了美国结构语言学派的发展。一个思维活跃的人，每当看到一个好的方法，总是自觉不自觉地与自己头脑中思考的问题挂起钩来，即所谓“见异思迁”、“见贤思齐”，因而能创造出新的东西。

我们以力学和光学中的某些原理在数学中的应用为例，说明“见异思迁”的思维方法。

早在两千多年以前，阿基米德就已经利用力学上的物体平衡的定律来证明一些几何命题，并将一些重要的结果写入“一些几何命题的力学证明”一书。下面是一个应用“杠杆原理”解几何题的实例。

杠杆原理是指，两个质点 M_1、M_2 的重心 G 在线段 M_1M_2 上，并且重心 G 到两质点的距离 d_1、d_2 与两质点的质量 m_1、m_2 成反比，即 $d_1:d_2=m_2:m_1$（见图28）。



图 28

〔例 1〕 任意四边形两对角线中点连线与两组对边中点

连线三线共点，并且被该点平分。

证明　若把$ABCD$看作一个质量均匀分布的四边形框（见图29），根据杠杆原理可知，其重心就是满足题意的点。

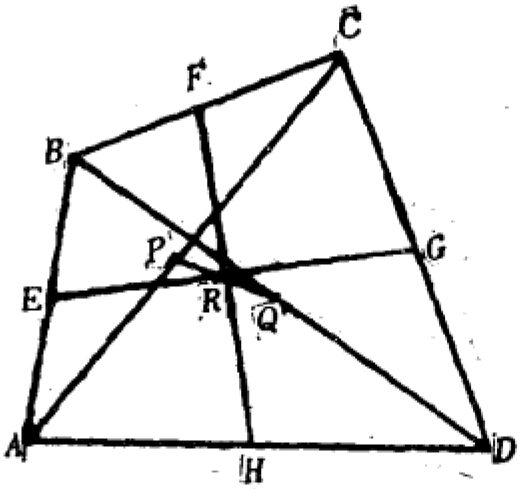


图 29

设在四边形$ABCD$的顶点A、B、C、D均放置单位质量，E、F、G、H分别为边AB、BC、CD、DA的中点，P、Q为对角线AC、BD的中点。

于是E是质点组$\{A, B\}$的重心，质量是2；G是质点组$\{C, D\}$的重心，质量是2；整个质点组$\{A, B, C, D\}$的重心在EG连线上。

同理可得，整个质点组$\{A, B, C, D\}$的重心也在HF连线上。因为质点组$\{A, B, C, D\}$的重心唯一，所以在EG、HF的交点处，记为R。

又点p是质点组$\{A, C\}$的重心，质量是2；点Q是质点组$\{B, D\}$的重心，质量是2。因而，整个质点组$\{A, B, C, D\}$的重心应在线段PQ的中点处，而质点组$\{A, B, C, D\}$只有唯一的重心。因此R也是PQ的中点，从而命题得证。

诚然，力学是以数学为工具的。然而，力学的研究也激发出不少新的数学理论。如雅可比和贝努里兄弟在研究受重力的质点在各种不同的曲线上运动时，创立了变分法。

下面再看弹子球游戏中的一个有趣的数学问题。

［例 2］ 如图 30，设 $ABCD$ 是一个矩形弹子球台，P、Q是两个球，现在把P球打出，欲使P球依次碰撞球台的上边、右边、下边和左边后，再击中Q球．试作出P球打出的路线．

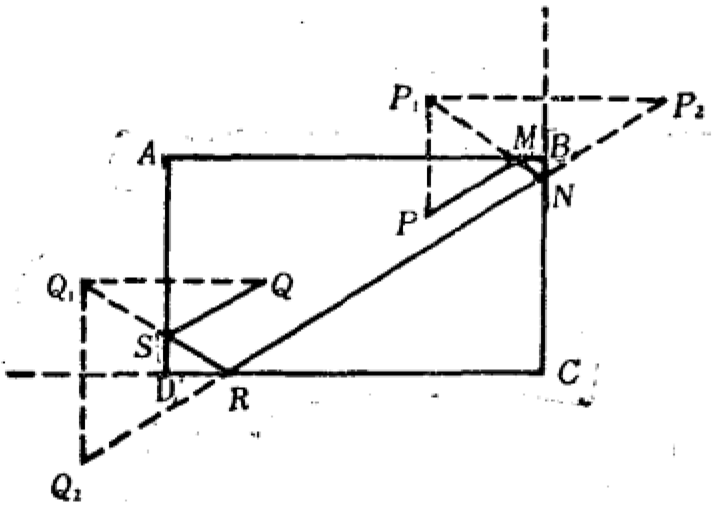


图 30

粗看起来，这个问题是相当困难的．为了作出P球的运动路线，首先得弄清P球在与球台边碰撞后是如何继续进行运动的．读者也许熟悉光线的传播路线．在光学中有这样的原理：光线从P点传播到Q点，永远沿时间为最少的路线传播．这是一条实验定律，人们很早就知道了，它被称为光行最速原理．因为光线在空气中的传播速度是一个常数，因此光行最速原理也可叙述为：光线从P点传播到Q点，总是沿最短路线进行．光在同一均匀媒质（如空气）中是沿着直线传播的．光在两种不同媒质的界面（如镜面）上会发生反射现象，并且遵从反射定律：入射线、法线和反射线在同一平面内，并且入射角α等于反射角β．如图31．如果已知光从P点传播到Q点，要求折射点O，只要作出Q关于MN的对称点Q'，连接PQ'，则PQ'与MN的交点O就是折射点．

这个证明很容易，读者可自己完成。这时从P点射出经O点折射到Q点的光线，就好象是从P'点（P的对称点）直线

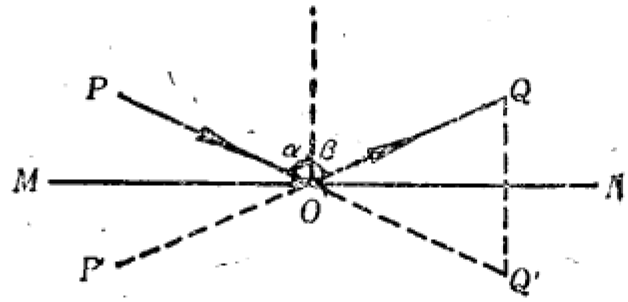


图 31

传播到Q点一样。声音的传播也有同样的原理。因此，我们有理由认为球与球台边碰撞也遵循同样的原理，即入射角α等于反射角β。这时从P点击出的球经AB边反弹后，可看作是从P的对称点P_1直线击出；再经过BC边反弹后，又可看作是从P_1点的对称点P_2直线击出。同样，若从Q点击出一球经AD边、CD边两次反弹后，可看作是从图中的对称点Q_2直线射出。因此，经CD、AD边反弹到Q点的球，可看作是由对称点Q_2击出，而P_2、Q_1间连线以直线段最短。因此，可得出如下作法：

（1）作P点关于AB边的对称点P_1，P_1点关于BC边的对称点P_2；

（2）作Q点关于AD边的对称点Q_1，Q_1点关于CD边的对称点Q_2；

（3）连结P_2Q_2，分别交BC、CD于N、R点；

（4）连结P_1N，交AB边于M点；连结Q_1R，交AD于S点；则折线$PMNRSQ$即为所求的P球的运动路线。

如果在球台的四条边AB、BC、CD、DA上任选一点M'，N'，R'，S'，根据两点间的连线以直线段为最短，就可以证明，上面作出的折线$PMNRSQ$的确是最短路线。

十三、抽象化方法

我们用数学史上非常有名的"哥尼斯堡七桥问题"来说明什么是抽象化方法。

18世纪，东普鲁士有个城市叫哥尼斯堡（现在苏联境内，已改名为加里宁格勒），城内有一条大河，河中有两个岛屿，全城由七座各具特色的大桥将河的两岸和河中的两个岛屿沟通。如图32。在河中心的岛上有一所古老的哥尼斯堡大学。据说每天傍晚，这所大学的学生们总要在这七座大桥之间散步。当时的大学生们热衷于这样一个难题：一个散步者怎样才能一次走遍这七座桥，最后又回到出发点？并且每

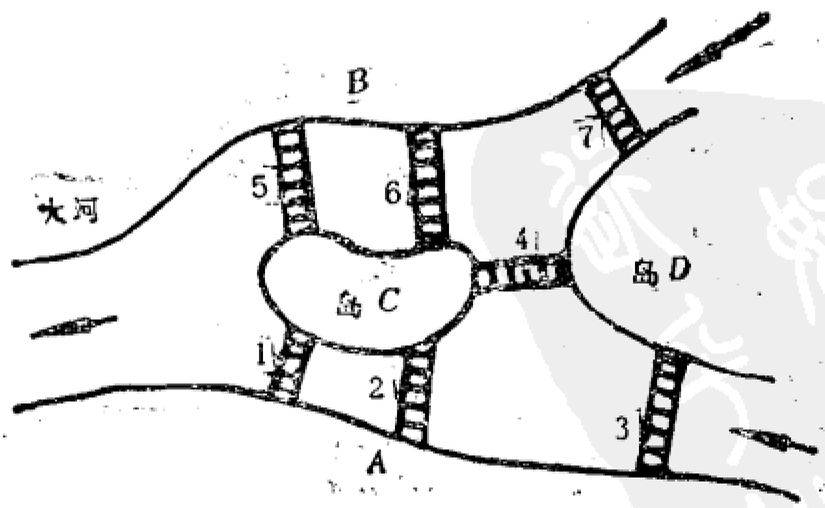


图 32

座桥只能走过一次，不许重复。这就是著名的哥尼斯堡七桥问题。

这个问题看起来不难，谁都愿意试试。可是，大学生们始终达不到目的。于是，有人写信给当时的大数学家欧拉请求帮助。欧拉想：千百人的试验都失败了，也许那样的走法根本就不存在。1736年欧拉终于严格地证明了这个猜想是对的，并且在圣彼得堡科学院的例会上，专门作了一次解答这个问题的学术报告。

欧拉究竟是怎样解决七桥问题的呢？他运用抽象化的方法，首先把七桥问题抽象化成一个数学问题。可以这样想：对于能否一次无重复地走遍七桥来说，桥的形状与长度显然是不起作用的。岛的大小、陆地的宽窄等因素也与问题的解决没有关系。因此，如果在图32中，把桥画得长一些，岛画得小一些，并不改变原来问题的实质。再进一步，把岛和陆地缩小成一个点，把桥画成一条线，就得到图33所示的图形，不妨记为图G。这个图形G显然比原来那张由桥、岛、陆地等构成的地图简单得多。但是图中仍然保留了原来的桥与岛、陆地之间的连结关系。欧拉指出："能不能从某一个地方出发，不重复地走遍七座桥，最后又回到出发点"，和"能不能从图G中的某一个顶点出发，把图G不重复地一笔画出来（"一笔画"即笔不离纸地画图），最后又回到起点"是一回事。

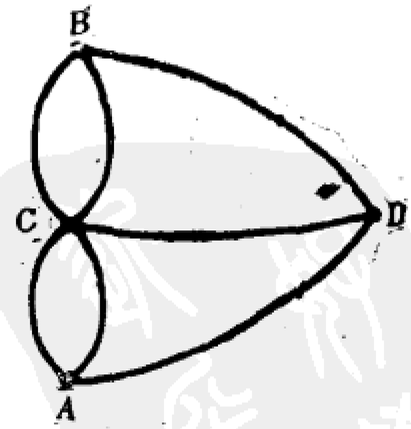


图 33

把七桥问题抽象成一笔画模型以后，欧拉就着重考虑一笔画的数学结构特征。一笔画有起点和终点，起点和终点重合者称为封闭图形，否则称为开放图形。除起点、终点外，一笔画中间还有一些曲线的交点。在这些交点处曲线必然一

出一进，因此，通过交点的曲线总数为偶数条。倘若在某交点处的曲线是奇数条，则一笔画就不能完成。显然，在起点和终点处，通过曲线的条数可以是奇数。

为了方便，欧拉还引入了如下一些概念：

如果每条线都有两个相异的端点，由有限条这样的线组成的图形叫做网络。这些线叫做网络的弧。互相衔接的一串弧，叫做一条路。弧的端点叫做网络的顶点。

如果一个网络的每两个顶点都可用一条路连接起来，那么，这个网络称为是连通的(即连成一片)；否则，称为是不连通的。例如图34中的(1)、(2)、(3)是连通的，(4)是不连通的。

如果某顶点与偶数条弧相联结，则称为偶顶点；如果某顶点与奇数条弧相联结，则称为奇顶点。

欧拉证明了下面的定理。

一个网络能够一笔画成的充分必要条件是：它是连通的，并且奇顶点个数等于0或者2。当网络是开放图形时，奇顶点个数恰好等于2。当网络是封闭图形时，奇顶点个数恰好等于0。

为了纪念欧拉的贡献，人们将这个定理称为欧拉定理。

运用欧拉定理很容易判定一个图形能否一笔画成。看下面几个图形。

图34-(1)是封闭图形，五个顶点都是偶顶点，即奇顶点个数是0，所以可以一笔画成。图34-(2)是开放图形，五个顶点中，V_1、V_5是奇顶点，V_2、V_3、V_4是偶顶点，奇顶点个数是2，所以也可以一笔画成。读者可以自已找出一笔画路线。图34-(3)是封闭图形，奇顶点个数是2，能一笔画成。图34-(4)不连通，根据欧拉定理，这个图形不能

一笔画成。

现在我们仍然回到七桥问题，易知图33中的四个顶点都是奇顶点，因此，根据欧拉定理，可以断定图33不能一笔画成。当年，欧拉就是根据这个定理宣布道："想不重复地走遍哥尼斯堡的七座桥，并且回到出发点是不可能的"．另外，根据欧拉定理，我们还可以断定，即使不要求回到出发点，而只要求不重复地走遍七座桥，也是不可能的。

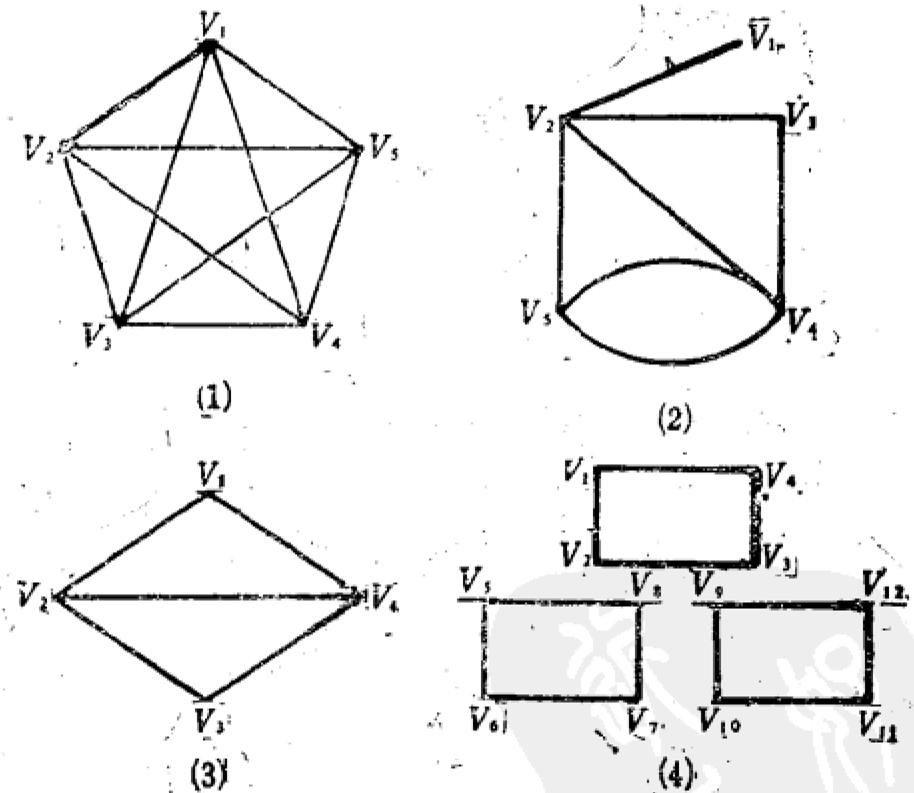


图 34

对于这个七桥问题，据说有人提出这样一种解决方案．把七座桥全部编上号码，分别叫做1号桥，2号桥，……，7号桥．如图32所示．如果有一种走遍七座桥的走法，例如先走1号桥，然后走3号、5号、7号、2号、4号、6号，我们把这种走法简记为"1357246"。学过排列组合的人都知

道，这是1，2，3，…，7这七个数字的一个排列。因此，如果有一种走法，一定与某一个排列相对应。于是，可以先把1，2，3，…，7这七个数字的所有排列都写出来。这种排列共有$7!=1\times2\times3\times\cdots\times7=5040$个。然后一个一个排列研究，看看有没有与这个排列相对应的走法。比如先考虑排列1234567，因为首先要走过1号桥，所以必须从陆地A出发，或者从岛C出发。但是从图31可以看出，不论从哪里出发，要按上面的顺序不重复地走遍七座桥是不可能的。对于其他排列可同样进行试验。当你把所有5040个排列都试完了，也没有找到一个符合要求的走法，就可断定说：一次无重复地走遍七座桥的走法是不存在的。

上面这种系统试验的方法，当然要比无顺序地乱试好。只要有耐心，慢慢试下去，总可找到问题的答案。但是，这种方法实在太费时间了。如果有一个十座桥的问题，也要找一种无重复地走遍所有桥的走法，就要试$10!=3628800$个排列。假设某人每小时可试100种排法，每天工作10小时，那么需要用10年左右时间才能全部试完。十年时间，人生能有几个十年！

欧拉运用抽象化方法，并没有对5040种排列逐一进行试验，就解决了大学生们提出的七桥问题。更为可贵的是，欧拉在解决七桥问题过程中所建立起来的方法，具有极大的普遍性，对于10桥问题，100桥问题，以及任何一笔画问题都能很方便地加以解决。而且由于欧拉的工作和其他许多数学家的共同努力，对七桥问题的深入研究还诱发了现代数学中图论和拓扑学的诞生。从这个例子可以看出抽象化方法的巨大威力。

抽象化方法是数学中普遍运用的一种思维方法。例如几

何学中的点、线、面，有谁见过？在客观世界存在的“点”都是具体的，它占有一定的空间大小；而“线”都有粗细之分，“面”也都有一定的厚度。但是，在几何学中，“点”没有空间大小；“线”没有粗细；“面”没有厚度。这样的“点”、“线”、“面”实际中并不存在，只是由数学家抽象出来的数学模型。试想，如果没有这些抽象的“点”、“线”、“面”，还会有今日之几何学？

20世纪以来，数学飞速发展，分支越来越多，新学科不断诞生，即使是数学家，也只熟悉自己研究的那个专门领域和了解一些邻近学科的情况，而对于大量的现代数学文献根本看不懂。一个人要了解数学全貌太困难了！法国的布尔巴基学派成功地运用抽象化方法，从浩如烟海的数学知识中，抽象出三种母结构（数学对象所具有的某些关系的特征称之为结构）：代数结构、序结构、拓扑结构。通俗地讲，所谓代数结构，是指数学对象在进行加减乘除四则运算方面所具有的特性。所谓序结构，就是一种顺序关系。所谓拓扑结构，就是在集合上能进行极限运算。运用这种结构的观点来观察数学对象，不仅为门类众多的数学学科的分类提供了科学标准，而且为人们认清整个现代数学的全貌描绘了一幅比较清晰的图画。

十四、欲穷千里目，更上一层楼

在讨论数学问题时，我们常常根据对一些特例的观察、归纳，概括出一个普遍的概念或结论。可是有时恰恰相反。例如，给定一条直线和一个正八面体的位置，求一个平面，使经过已知直线并且平分已知正八面体的体积。这个问题看起来很困难。但是，如果你稍稍熟悉正八面体的形状，知道它是一个具有对称中心的几何体。因而可以提出一个更加普遍的问题：给定一条直线和一个具有对称中心的几何体的位置，求一个平面，使经过已知直线并且平分已知几何体的体积。容易知道，所求的平面必然经过已知几何体的对称中心。所以，这个平面就是由对称中心与已知直线所确定的平面。这样，原来的问题当然也就迎刃而解了。

耐人寻味的是第二个问题比第一个问题更加普遍化，但解决起来反而比第一个容易得多。正如数学家玻利亚在《怎样解题》一书的“发明家的矛盾”一节中写道：“雄心大的计划，成功的希望也较大。这看起来矛盾。但当从一个问题过渡到另一个，我们常常看到，新的雄心大的问题比原问题更容易掌握。较多的问题可能比恰好只有一个问题更容易回答，较复杂的定理可能更容易证明，较普遍的问题可能更容易解决。”

不仅如此，有些数学问题的实质，只有在掌握了更深入一步的数学知识，或者说，只有在进入更高一层的数学境界时，才能真正看清它的真实面貌。

对于实数集和复数集，读者一般都比较熟悉，它们都可以进行加减乘除四则运算，都有绝对值，似乎差别不大。奇怪的是实数可以比较大小，但是复数却没有大小之分。为什么复数不能比较大小？如果象查字典那样，把复数先按实部大小进行排列，当实部相同时再按虚部大小进行排列。或者先比较复数模的大小，模相同时再看幅角主值的大小。这样定义复数大小关系是否可以？对这个问题许多人不甚了了，或者只是把“复数无大小”作为一种规定接受下来。倘若运用数学结构的观点就可将这个问题讲清楚。

上一节我们讲到，法国的布尔巴基学派从纷繁复杂的数学关系中抽象出三种母结构：代数结构、序结构、拓扑结构。对于全体实数和全体复数也可以进行这种结构分析。

全体实数 R 的结构如下：

1．R 的代数结构是域，即其中定义“+”和“·”两种运算，并且满足以下九条：

(1) 加法结合律，即对于 R 中任意三个元素 x、y 和 z，有 $x+(y+z)=(x+y)+z$；

(2) 加法交换律，即 $x+y=y+x$；

(3) 关于加法有单位元（零元）0，即 $x+0=x$；

(4) 关于加法有逆元 $(-x)$，即 $x+(-x)=0$；

(5) 乘法结合律，即 $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$；

(6) 乘法有单位元 1，即 $x\cdot 1=1\cdot x=1$；

(7) 乘法交换律，即 $x\cdot y=y\cdot x$；

(8) 关于乘法和加法有分配律，即 $(x+y)z=xz+yz$；

(9) 非零元有逆元，即对任意非零实数 x，总有 x^{-1}，使 $x\cdot x^{-1}=1$。

2．R 的序结构是全序，即存在关系“$\leqslant$”满足以下四条：

(1) 反身性，即对任何元素恒有 $x\leqslant x$；

(2) 传递性，即由 $x\leqslant y$，$y\leqslant z$，可以推出 $x\leqslant z$；

(3) 反对称性，即由 $x\leqslant y$ 且 $y\leqslant x$，可以推出 $x=y$；

(4) 对 R 中任何两个元素 x、y，在 $x\leqslant y$ 和 $y\leqslant x$ 中至少有一个成立。

3. R 是全序域，即 R 的代数结构和序结构是协调的，它们之间满足：

(1) 加法保序：如 $x\leqslant y$，则对任何 z，有 $x+z\leqslant y+z$；

(2) 乘正数保序：如 $x\leqslant y$，$z\geqslant 0$，则 $xz\leqslant yz$。

4. R 是阿基米得有序域，即 R 作为有序域还满足阿基米得性质：对任意实数 x 和任意正数 ε，都存在正数 N，使得 $N\varepsilon>x$。

5. R 的拓扑结构是完备的距离空间，即在实数集 R 中可以引入距离 $d(a, b)=|a-b|$，当一列闭区间套 $[a_n, b_n]$，它们两端点间距离（区间长度）$|a_n-b_n|$ 趋向于 0 时，必有一个实数 P，属于所有的区间 $[a_n, b_n]$。

引入虚数单位 i，$i^2=-1$，就可得到复数集 C。现在来分析全体复数 C 的结构。

容易验证全体复数 C 满足第 1 组结构的九条性质，因而构成域；也满足第 5 组结构，因而按距离 $|a-b|$ 是完备的。为了使复数集 C 成为全序集，只要如同前面说的按字典顺序排列，先按实部大小进行排列，若实部相同，再按虚部排列。这的确是一种全序关系，满足第 2 组结构。

再看 3、4 两组结构。第 3 组结构是反映代数结构和序结构的协调性，对于复数域 C 来说，它的代数结构绝不能和任何全序结构协调。也就是说，复数集虽然可能是全序集，却绝不可能是全序域。这可证明如下：

已知全体复数C构成域，而且是全序集，要进一步判断是不是全序域，只要看能否满足第3组结构。因为复数集C是全序集，i和0是C中的元素，并且$i\neq 0$，所以$i<0$、$i>0$中至少有一个成立。不妨令$i>0$，两边加$(-i)$，由加法保序性得$0>-i$，两边乘"正数"i，可得$0>-i^2$，即$0>1$，再乘i得$i<0$，与假设$i>0$矛盾。若设$i<0$，同样会导致矛盾。这就证得全体复数C不可能是全序域。

因此，实数域与复数域之间的本质区别在于：实数域的代数结构与其全序结构是协调的，因而是全序域。而复数域的代数结构不可能和任何全序结构协调，从而不可能成为全序域。复数之所以不能比较大小，不是不能排成全序，而是不能与其代数结构相协调。至于阿基米得性质，因为C不是全序域，当然更不一定满足了。

十五、有限无限两相通

古希腊的芝诺曾提出一个著名的"阿基里斯追不上乌龟"的疑难．大意是说，神话中的阿基里斯与乌龟赛跑．乌龟在前面走，阿基里斯要在后面追上乌龟，首先必须跑到乌龟最初的位置．但在这段时间里，乌龟又向前爬行了一小段距离．于是，阿基里斯又必须再跑完这段距离．照此推论，阿基里斯只能越来越接近乌龟，却永远追不上乌龟．譬如，设阿基里斯的速度是10米/秒，乌龟的速度是 0.1 米/秒，乌龟最初在阿基里斯前面50米处．当阿基里斯用 5 秒钟跑完50米到达乌龟最初所在位置时，乌龟又向前爬行了 0.5 米．阿基里斯再用0.05秒跑完这0.5米时，乌龟又前进了0.005米．……这样，在乌龟和阿基里斯之间永远有一小段路程需要他去跑完．显然，这是一个诡辩．今天的小学生都能算出，阿基里斯只要用$\frac{500}{99}$秒，就能跑完$\frac{5000}{99}$米追上乌龟．

上面的芝诺悖论，利用了人们以为无限段时间的总和以及无限段路程的总和只能为无限的错误观念，否认了无限可以转化为有限，因而把当时的人们诱入陷井．随着人们数学知识的丰富，逐步认识到，无限个数相加也可以得到有限的和．例如$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$．尽管一个人的生命有限，只能进行有限步骤的实际计算，但由于在一定条件下，无限可以转化为有限，因此，人在无限面前仍然是大有可为的．例如对于一个无穷递缩等比数列a、aq，aq^2，…，

aq^{n-1}，…$|q|<1$；通过公式$\frac{a}{1-q}$,只要进行一次减法和除法，就可求得它的无限多项的和．倘若要证明一个命题对于所有的自然数都成立，如果我们分别对$n=1,2,3$，…进行验证，这个证明是永远无法完成的．因为即使你证明了n从1到10000时都成立，那么$n=10001$是否成立,仍然无法保证．我们无法对无限多个自然数逐一加以验证，只能通过有限的步骤来完成这个证明。实际上，只要完成下列两个步骤：（1）证得$n=1$时，命题成立；（2）假设$n=k$时命题成立，则可推出$n=k+1$时也成立．第二步的实质是建立一种递推关系．这样，由$n=1$成立可推得$n=2$时也成立；由$n=2$成立,可推得$n=3$成立；……从而保证对任何自然数n均成立．这正是数学归纳法的方法和原理．运用数学归纳法很容易证得下列各式对所有自然数都成立：

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(1+n)}{2};$$

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$n>2$边形的各内角之和为$(n-2)\pi$．

极限方法是通过有限操作完成无限运算的又一典型例子．

［例］ 证明$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1$．

设 $S_1=\frac{1}{2}$，$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$，…，$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}$，…

于是，这个题目的实质就在于证明无穷数列S_1，S_2，…，S_n，…的极限是1．根据极限概念,即证明：当项数n无限增大时，

S_n与"1"无限趋近，或者说S_n与"1"之差要多小有多小（指绝对值）。譬如说S_n与"1"之差可以达到0.1，0.01，0.0001，…，即使它们的差达到10^{-1000}这么小，能否就说S_n与"1"之差要多小有多小？不能。因为还有比10^{-1000}更小的差10^{-10000}，$10^{-100000}$等等，是否能满足，不得而知。因此，S_n与1无限趋近的过程是一个无限的过程。依照上面的方法，我们永远无法证明数列S_n的极限是1。必须另外创造新的方法。

设有任意小的正数ε，并且从第n项起以后所有的项S_n都能满足不等式$|S_n-1|<\varepsilon$。

$$\because S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^n}$$

∴上面的不等式可化为

$$\left|\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1\right|<\varepsilon$$

即 $$\frac{1}{2^n}<\varepsilon,\ 2^n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

两边取对数得 $n>\log_2\frac{1}{\varepsilon}$.

若记$\log_2\frac{1}{\varepsilon}$的整数部分为$N$，则$n=N+1$项起，以后各项都能满足不等式$|S_n-1|<\varepsilon$。

由于ε是一个预先指定的任意小的正数，因此上面不等式就保证了数列S_n与"1"的差的绝对值要多小就有多小。在上面的证明过程中，我们借助于"ε"和"N"，通过解一个不等式（只含有限步运算），就完成了极限定义所要求的无限过程。实在令人惊叹！因此，有人把极限方法称为是人类思想

文化中的一块瑰宝，的确一点也不过份。

上面我们讲了无限如何转化为有限，或如何通过有限来实现。这只是问题的一个方面。反过来，有限也可以转化为无限，并且在某些情况下，只有通过这种转化，才能深刻认识有限量的丰富的内涵。

现在的小学生都知道圆周长公式 $C=2\pi r$。可是，最初并没有这个计算公式。古希腊的阿基米得，我国魏晋时代的刘徽等人为了计算圆周长这个有限量，不得不作出一系列圆内接正多边形，随着正多边形边数的增多，多边形的周长越来越逼近圆的周长。当多边形的边数无限增大时，其周长的极限值就是圆周长。人们正是通过计算边数逐渐增加的圆内接正多边形的周长这一无限过程，来认识圆周长这一有限量的，并由此算出了圆周率 π 的近似值。这个例子读者也许已经熟悉。下面再举一个关于"e"的例子。

"e"是自然对数的底，是中学里除"π"以外的另一个重要的无理数，它在数学和工程技术中有着非常广泛的应用。如何计算"e"的值？

学过一点微积分的人都知道，函数 e^x 可表示为：

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \qquad (1)$$

当 $x=1$ 时，有

$$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots \qquad (2)$$

利用(2)式，只要等式右边的项数取得足够多，就可以算得 e 的任意精确度的数值。而这件工作由电子计算机通过循环语句是很容易实现的。

如果以 $1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$ 作为数 e 的近似值，其误差

小于 $\frac{1}{n!n}$. 这是因为

$$e-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\frac{1}{(n+3)!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right)$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{n!n}. \qquad (3)$$

利用上面的结果，还可以证得数 e 是无理数.

证明 用反证法。假设 e 是有理数，则 e 可表示为分数形式，不妨令 $e=\frac{p}{q}$，其中 p、q 都是正整数。

设 $S_q=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}$

由不等式（3），有 $e-S_q<\frac{1}{q!q}$

$$\therefore \quad 0<q!(e-S_q)<q!\frac{1}{q!q}=\frac{1}{q}\leqslant 1$$

即 $q!(e-S_q)$ 是介于 0 与 1 之间的小数。

另一方面，由 $e=\frac{p}{q}$ 可得

$$q!(e-S_q)=q!\left[\frac{p}{q}-\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}\right)\right]$$

不难看出，$q!$ 是等号右边括号中各项的公分母，因此，$q!(e-S_q)$ 是正整数，与上面证得的结论（介于 0 与 1 之间的小数）矛盾。所以，数 e 是无理数。

一些比较复杂的函数(有限形式)，正是通过把它展开成一个无穷级数(无限形式)，从而给研究这些函数的性质和进行数值计算带来了极大的方便。

十六、偶然中有必然

夏天的夜晚，群星灿烂。当你仰望天空，正在欣赏这美丽的夜景时，突然一颗流星划破夜空。究竟什么时候会出现流星，这带有很大的偶然性。

当一个人在办公室值班时，常常会接到许多电话，或找人，或询问工作。一天中到底会来多少电话，哪些人来电话，这也带有很大的偶然性。

带偶然性的现象在自然界和人类社会中到处可见。我们把这种具有偶然性的现象称为随机现象。随机现象的产生，是由于许多事物的发展变化并不受单一的确定的因果关系的制约，因而具有多种不同的可能性，到底出现哪一种结果，往往带有偶然性或随机性。正因为偶然性的存在，客观世界方显出千姿百态，新鲜事物才会层出不穷。初始阶段，人们以为这类现象无规律可循，从而给偶然性抹上一层神秘的甚至迷信的色彩。随着社会实践的深入和知识的逐步积累，人们认识到，在纷繁复杂的大量的偶然现象后面，隐藏着必然的规律。下面我们来看历史上非常有名的掷硬币试验。

你试着向上抛掷一枚伍分硬币，结果可能正面向上，也可能反面向上。为了叙述方便，我们规定有国徽的一面为正面，写着“伍分”字样的一面为反面。假定掷了10次，正面出现的次数可能是1次，2次，3次，…，10次；结果很不确定。但是，如果你有耐心掷上一万次，就会发现出现正面的次数总是非常接近五千次。下表是历史上两位学者进行试验的结

果.

试验者	掷硬币次数 (n)	正面向上次数 (m)	正面出现频率 (m/n)
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

掷一枚硬币时，朝上的方式只有两种：正面向上或反面向上. 当然这里我们假定硬币落到桌面上时，不会在它的边沿上立起来，而这个假定一般总是成立的. 因为硬币制造得很匀称，所以出现正面和出现反面的机会相等，因此出现正面的机会是两个等可能方式中的一个，即出现正面的机会为 $\frac{1}{2}$ 或0.5. 当抛掷次数较少时，由于受到用力不均匀，一阵微风的掠过，桌面上细微的凹凸不平等许多偶然因素的影响，因而使出现正面的次数不稳定. 当试验次数很大时，这些微小的偶然因素便会相互抵消，而使正面出现的次数呈现出一种相当好的稳定性，即正面出现次数与试验次数的比值（频率）稳定于0.5. 我们把这种频率的稳定值称为概率. 于是，我们说掷硬币时，出现正面的概率是0.5.

上面的讨论告诉我们，概率是对某种事件出现的可能性的度量，可以通过大数次的重复试验，由频率的稳定值求得. 但在一些简单的情况下，也可通过直接计算求得.

[例1] 了解一下你周围的人有无色盲患者，其中男性几人？女性几人？你会发现男性色盲患者远甚于女性. 这个

现象的发生有无必然性？计算一下它们的概率会帮助你解开这个谜．

遗传学告诉我们，雄性生物体内的细胞有 x、y 染色体各一条，而雌性则有两条 x 染色体．当雄性中唯一的一条 x 染色体有色盲缺陷时，他就是色盲．当雌性的两条 x 染色体都有色盲缺陷时，她才是色盲．因为其中只要有一条好的染色体，她就具有感觉颜色的能力，如图35所示．其中染色体

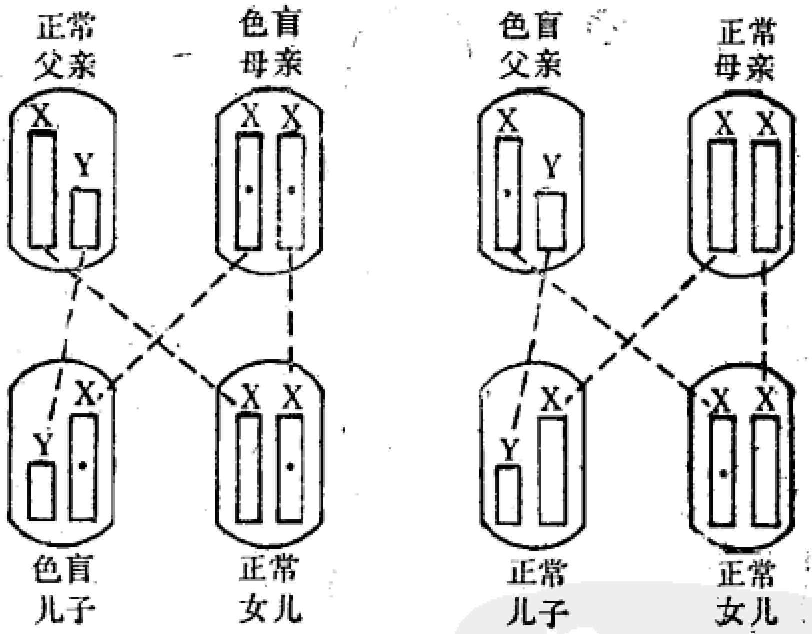


图 35

中有黑点者表示有色盲缺陷．

如果 x 染色体中有色盲缺陷的概率是千分之一，那么，在一千个男人中大约会有一个色盲，而女性有两条 x 染色体，根据乘法原理可以知道，两条 x 染色体同时具有色盲缺陷的概率是：

$$\frac{1}{1000}\times\frac{1}{1000}=\frac{1}{1000000}.$$

因此，一百万个女人中，才差不多会发现一名色盲患者．这就是男性色盲远多于女性色盲的原因．从上面的图中还可看

出，如果父亲视觉正常，母亲是色盲，那么他们的儿子一定是色盲，而女儿则视觉正常．色盲父亲和视觉正常母亲不会生出色盲子女．

由局部对整体作出推断，是研究随机现象的另一个重要内容．我们的工厂每天都生产出大量的产品，为了保证质量，需要进行检查和验收．一大批产品如何进行检验呢？如果能够对每件产品进行检验当然很好．然而，实际上常常不允许这样做．如有些产品数量很大，逐件检查要耗费大量人力、物力和时间；而有些产品的检验是破坏性的，一经检验就不能再使用．例如电灯泡的使用寿命，炮弹的杀伤半径，电影胶片的感光性能等．因此，只能从全部产品中抽取一部分进行检验．一批产品中有正品，有次品，我们随意抽取一件进行检验，如果是正品，能否断定这整批产品都是正品？或者这一件恰为次品，能否断定这一批产品全为次品？显然不能这样断定．也就是说，抽查一件产品结果具有偶然性，即使抽查几件产品检验也仍然具有相当大的偶然性．那么，抽取多少件产品检验，才能呈现出一定的统计规律性？对这个问题，现代数理统计学已创造出许多行之有效的方法．下面举一个例子说明抽样统计的基本思想．

［例２］ 设有一块已经结穗的水稻田，试估计它的产量．

估计产量的关键在于估算出单位面积产量．先在这块稻田的四角和中心各取一相等的小块(如图36)，如能测出每小块的单位面积产量，再取其平均值就是整块水稻田的估计单位面积产量．

如何测出每小块的单位面积产量呢？设图36中，中间一小块矩形长 a 厘米、宽 b 厘米，其中有９株水稻．我们再从这９株水稻中各任取一穗，测出这９穗的总粒数(空粒不计)，

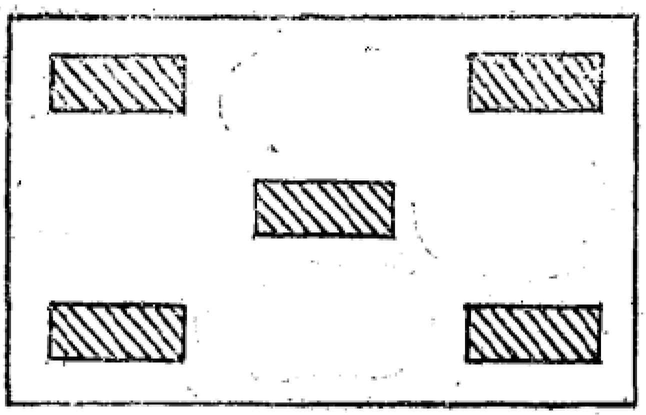


图 36

除以 9 就得到每穗的平均粒数 k。假设这 9 株水稻上共有 n 穗，可近似地认为这 9 株水稻共生长 nk 粒稻谷。而根据以前的生产资料已知这品种每千粒重 p 克。于是这小块地的产量是 $\frac{nkp}{1000}$ 克。因此，可以得到这小块地的单位面积产量 x_1 为：

$$x_1 = \frac{nkp}{1000}(\text{克}) \div ab\ (\text{平方厘米})$$

$$= \frac{nkp}{1000ab}(\text{克/平方厘米}).$$

按同样方法测算出其余四小块地的单位面积产量 x_2, x_3, x_4, x_5。因此，整块稻田的单位面积产量为

$$x = \frac{1}{5}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

这样，只要知道稻田的总面积就可以估算出整块稻田的产量。

只抽取少量的样本进行分析，要对整体作出推断，这样的方法是否靠得住？简单介绍一下美国的盖洛普民意测验也许能帮助你理解这个问题。

1936年美国正在进行总统选举，竞选对手是民主党的罗

斯福和共和党的兰登。当时美国正处于一场空前的经济大萧条，而罗斯福是在任的总统。权威杂志《文学文摘》，采用大规模的模拟选举，根据200多万张选票统计，认为罗斯福将失败，兰登将以57%的多数票入主白宫。当时有位名不见经传的青年盖洛普，大胆预言罗斯福将连任总统，但并没有引起人们的重视。结果罗斯福胜利了，盖洛普从此声名大振。权威的《文学文摘》则威信扫地。这是什么道理呢？这是因为《文学文摘》的读者主要是中等阶级，他们对当时的经济大萧条非常不满，从这样的读者群中抽取样本，即使数量高达200多万，却并不能代表美国全体选民。而盖洛普采用的是随机抽样方法，注意到抽样的样本在性别、年龄、职业、收入、种族等基本指标的分布上同全国人口的结构一致。这样的样本实际上是全国总人口的一个缩影，因而具有很大的代表性。每次虽然只对几千人进行调查统计，仍然能提供正确的预测。1936年到1984年期间，盖洛普民意测验所（又称"美国舆论研究所"）对美国十三届总统竞选进行预测，与实际选举结果相比，平均误差只有2.6%，精确程度是社会科学研究史上所少有的。

十七、模糊中见光明

人们常常认为“精确总比模糊好”，其实并非如此．用电子计算机计算圆周率π，要不了几天时间就能算到十万位小数．要是由一个人用笔算，一辈子也算不了那么多．人们无不赞叹电子计算机在计算方面的精确性本领．可是，如果让电子计算机判断一个走过来的人是谁时，它先要测量来人的身高，体重，胖瘦，手臂摆动的角度、频率，走路的速度、加速度等一大批数据，并且每一个数字都要精确到小数点后几十位，然后再与储存在机器里的信息进行比较．只要来人的体重，胖瘦等与原先储存的信息略有变化，就会闹出“翻脸不认人”的笑话．而我们人做这件工作时，只要把来人的高矮，胖瘦，走路姿势等，与储存在大脑中的模糊信息加以比较，即使某些特征稍有变化，也不难得到正确的结论．一个拥有几千人的大单位的门卫人员，能够根据一些模糊印象一眼识别出进门的人是否本单位的职工．

模糊现象是一种普遍存在的现象．

一棵树上的叶子有着共同的特征，可是其中没有两片完全相同；

高个子和矮个子之间不存在什么严格的界限；

电视图象的是否清晰，也没有一条明确的界线；

……

这些大量存在的模糊现象，反映到人们的思维中，便形成了许多没有明确的内涵和外延的模糊概念．如“高”和“矮”，

"明"和"暗"，"浓"和"淡"，"好看"和"难看"等等，都是模糊概念。以精确性为其特征的传统数学遇到模糊概念就无能为力了，并且总是排斥模糊概念。1965年，美国控制论专家查德首创模糊集合，开辟了一个全新的数学领域——模糊数学。只是从这时起，模糊现象和模糊概念才成为数学研究的对象。

现今的模糊数学实现由模糊向精确转化的主要途径有两个，一是关于隶属度的概念，一是关于浮动水平截集的方法。隶属度是模糊集合的基本概念，是对经典集合论加以改造的结果。经典集合论规定：对于给定集合 A，论域中的任一元素 x 要么属于 A，要么不属于 A，二者必居其一，不允许模棱两可。如果我们规定 x 属于 A 时，从属程度为1，x 不属于 A 时，从属程度为0，则经典集合可用特征函数表示为：

$$C_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\overline{\in} A.\end{cases}$$

显而易见，经典集合的特征函数的值域只是0，1两个值。模糊集合论把经典集合中绝对的属于、不属于变为程度上相对的属于、不属于，并引进"隶属度"概念刻划某元素属于某集合的程度，其实质是把经典集合论特征函数的取值从0，1两个值，扩大到 0 与 1 之间的一个连续区间，并且把模糊集合的特征函数称为隶属函数，记作 $u_{\underset{\sim}{A}}(x)$。$u_{\underset{\sim}{A}}(x)=0$ 表示元素 x 完全不属于模糊集 $\underset{\sim}{A}$；$u_{\underset{\sim}{A}}(x)=1$ 表示元素 x 完全属于模糊集 $\underset{\sim}{A}$；$u_{\underset{\sim}{A}}(x)=0.1, 0.2, 0.3, \cdots, 0.9$ 则分别表示出从属程度的高低。例如，我们平时常说的"几个人"，"几个零件"中的"几个"这个概念，显然是一个模糊概念。在模糊数学里用下面的式子来表示：

$$几个=\frac{0}{1}+\frac{0}{2}+\frac{0.5}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0.8}{7}+\frac{0.5}{8}+\frac{0}{9}+\frac{0}{10} \quad (1)$$

式中的分式并不表示相除，分母的数字表示集合中的元素，分子的数字表示相应分母上的元素属于这一集合的从属程度。例如$\frac{0.8}{4}$表示"元素 4 属于模糊集'几个'的从属程度是 0.8"。符号"+"也不表示相加，而是表示由这些元素并列组成该模糊集。

为了把一个模糊集$\underset{\sim}{A}$转化为一个普通集，我们可以按照隶属度的大小取一定的值λ进行截割。凡是隶属度达到或超过λ的元素，便划为$\underset{\sim}{A}$的成员。否则，便不划进。这个由隶属度数值达到或大于某一数值λ的元素所组成的集合A_λ，称为模糊集$\underset{\sim}{A}$的λ水平截集。经过这样的截割，模糊集就被转化为普通集了。例如{几个}是一个模糊集，记为$\underset{\sim}{A}$。由(1)式可知，3个属于$\underset{\sim}{A}$的隶属度是0.5；4个属于$\underset{\sim}{A}$的隶属度是0.8；5个、6个、7个、8个的隶属度分别是1、1、0.8、0.5。如果选择水平值λ=0.5，那么1、2、9、10都不在这个水平集中。因此，截集$A_\lambda=0.5=\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$。从这个例子可以看出，模糊集$\underset{\sim}{A}$={几个}经过λ水平值截割，获得了明确的边界，从而转化为普通集合。从本质上说，任何普通集合的建立，都是通过截集方法，使模糊转化为相对清晰的集合。但在模糊数学产生之前，人们只能在推演前自觉不自觉地进行截割，不可能通过对隶属程度进行分析，深入考察各种中介信息的意义，其元素的选取难免带有较大的盲目性和主观随意性。模糊数学的截割思想，注重首先对各种中介过渡环

节的信息意义加以分析，通过隶属度的比较，然后选择适当的水平值截割，最后作出非模糊的判决。模糊数学这种先分析后截割的方法，更加科学，更加符合人类认识的客观过程。

下面我们来说明如何确定隶属函数？

确定隶属函数的方法很多，限于篇幅，我们只介绍用二元对比排序法确定隶属函数。这种方法是先把事物两两对比，从而确定顺序，然后按一定的法则确定出总体的顺序，由此近似地确定出隶属函数。

［例］ 设论域是美丽的花的集合，显然，“美丽”或“美”是一个模糊概念。下面我们只讨论樱花、菊花、蒲公英三种花对“美”的隶属程度。于是论域E为：

$$E=\{\text{樱花，菊花，蒲公英}\}.$$

如果分别用字母x、y、z表示樱花、菊花、蒲公英，则有

$$E=\{x, y, z\}.$$

如果把樱花和菊花放在一起进行二元对比，得到樱花的美丽度为0.8，菊花的美丽度为0.7，则可表示为

$$g(x, y)=0.8, \quad g(y, x)=0.7.$$

其中$g(x, y)$表示元素x与y进行二元对比时x的美丽度，即樱花的美丽度；$g(y, x)$则表示经过二元对比后菊花的美丽度。

如果把樱花和蒲公英进行二元对比，则有

$$g(x, z)=0.9, \quad g(z, x)=0.5.$$

如果把菊花和蒲公英进行二元对比，则有

$$g(y, z)=0.8, \quad g(z, y)=0.4.$$

将上面的结果列表于后。

表中符号$g(x, y)$表示把两个元素x和y进行对比时，x的美丽度。必须注意，这里的两个元素有先后顺序。$g(y, x)$则

樱花、菊花、蒲公英的比较

$g(x,y)$	x	y	z
x	1	0.8	0.9
y	0.7	1	0.8
z	0.5	0.4	1

表示元素x和y进行二元对比时，y的美丽度。如果把元素x和自身进行对比，我们规定美丽度为1。即$g(x,\ x)=1$，同理$g(y,\ y)=1$，$g(z,\ z)=1$。

如果我们对这三种花没有偏爱和特殊兴趣，则取相同的权数求平均值，于是有

$$\text{樱花对“美”的隶属度}=\frac{1}{3}[g(x,x)+g(x,y)+g(x,z)]=0.9;$$

$$\text{菊花对“美”的隶属度}=\frac{1}{3}[g(y,x)+g(y,y)+g(y,z)]=0.83;$$

$$\text{蒲公英对“美”的隶属度}=\frac{1}{3}[g(z,x)+g(z,y)+g(z,z)]=0.63.$$

因此，在权相等时，论域E上的模糊集“美丽”$\underset{\sim}{A}$为

$$\underset{\sim}{A}=\frac{0.9}{\text{樱花}}+\frac{0.83}{\text{菊花}}+\frac{0.63}{\text{蒲公英}},$$

于是，樱花最美丽。

可是，如果在我国对这三种花进行评比，也许菊花能够

夺魁，这是什么原因呢？这是由于我国人民对菊花有着特殊兴趣和偏爱，古往今来赞颂菊花的诗篇不计其数。因此在求平均值时取相同的权数就不符合实际了。考虑到人们对三种花的偏爱不同应取不同的权数，例如给樱花、菊花、蒲公英分别赋权数为0.31，0.38，0.31，则得

$$樱花对“美”的隶属度 = 0.31\times[g(x,x)+g(x,y)+ +g(x,z)] = 0.84;$$

$$菊花对“美”的隶属度 = 0.38\times[g(y,x)+g(y,y)+ +g(y,z)] = 0.95;$$

$$蒲公英对“美”的隶属度 = 0.31\times[g(z,x)+g(z,y)+ +g(z,z)] = 0.59.$$

于是，在论域E上的加权模糊集“美丽”$\underset{\sim}{B}$为

$$\underset{\sim}{B} = \frac{0.84}{樱花} + \frac{0.95}{菊花} + \frac{0.59}{蒲公英}$$

这就是菊花能够夺魁的原因。

这个例子具体地告诉我们，模糊数学是如何将模糊概念加以数量化、精确化的。模糊数学虽然讫今只有二十多年的历史，但她已显示出强大的生命力，在拓扑学、计算机科学、气象预报、医疗诊断、生物学、心理学、语言学等许多领域得到了广泛的应用。

十八、游戏中的智慧之光

通常人们总把智力游戏当作饭后茶余的一种消遣。其实，在一些智力游戏的题目中却闪烁着数学智慧的光芒。

在我国民间，有一种几千年前流传至今的二人智力游戏，规则很简单：有k堆物体（小棒或石子），两人轮流从中拿取，每次只能在其中一堆中拿取，至少取一个，至多取一堆，谁最后取完谁负（或胜）。这种游戏在$k=3$时最有意思。北方称为“抓三堆”，南方叫做“拧法”，后来流传到世界上，外国人就叫它“Nim”。“Nim”可能就是“拧法”的音译。

Nim规则虽然简单，但要取胜却非常困难，因而被人们称为游戏中的皇后，激励着人们通过反复的试验寻找制胜的途径。几千年来，人们努力探索在各种情况下能揭示正确取法的一般法则。1901年，美籍法国数学家布顿(C.L.Bonton)用一种精巧的分析方法，找到了一个非常简单的原则，任何人都能应用、运用这个原则能使你知道哪是负局、哪是胜局，以及在负局情况下如何转败为胜。于是，古代的游戏变成了一个漂亮的数学问题的解。但是作为一种游戏，却被完全破坏了。因为如果双方都知道了这个原则，游戏胜负一望即知，也就索然无味了。但是，这一下可惹恼了一位丹麦的科学家和发明家皮特·海因(Piet Hein)，他决心恢复Nim作为数学皇后的古老尊严。到本世纪50年代，皮特·海因终于大功告成。他把Nim的规则改进成为一种新的Nim，既保留了游戏规则的简易性，同时又使布顿发现的制胜原则对这个新的

Nim失效。皮特•海因的新规则由加德纳（M。Cardner）写成文章发表在《科学的美国人》上，并收入他的一本关于数学谜题与游戏的书中。20多年来，数学家企图破解这一新的Nim，尽力找寻一个一般的制胜原则，如同布顿对原Nim所作的分析那样。但是，他们的努力至今都没有成功。

由于数学家的介入，Nim已成了斗智的战场。更重要的是随着对策论、图论和组合数学的发展，当人们用新的眼光观察Nim时，它已作为一种数学模型，给人以新的启迪。于是Nim升格了，它不再仅仅是一种游戏，已一跃成为一个新的数学术语，开始在数学论文和专著中出现。在上世纪末，组合数学家穆尔（E.H.Moore）提出了一种p阶Nim，成为图论Nim型对策第三定理的重要例子。法国数学家贝尔热（C.Berge）在他1962年出版的一本颇有影响的专著《图论及其应用》中有一章主要就是研究“Nim型对策”。贝尔热在书中说，为了纪念这个人们所熟悉的游戏，所定义的数学上的广义的Nim，便命名为“Nim型对策”。

下面再看一个由“幻方”导致数学发明的例子。

图37的方阵具有奇妙的性质。它的每一行、每一列、每一条对角线上的三个数的和都等于15。显然，这样的方阵不只一个。例如交换第一列与第三列得出的方阵也满足同样的

4	9	2
3	5	7
8	1	6

（1）

2	9	4
7	5	3
6	1	8

（2）

图 37

条件。这样的方阵共有 8 个。象这种三行三列的方阵，叫做“三阶幻方”。有关它的记载最早出现在我国春秋时期（约公元前 500 年）的著作《论语》和《书经》中。

由于幻方性质奇特，人们曾赋予各种神奇的色彩。有一个流传至今的河图洛书的神话说：夏禹治水时，从黄河的水中跃出一头龙马，驮着一张“河图”；从洛河（黄河的一条支流）里浮出一只大龟，背着一幅“洛书”（图38）。这些都献给了夏禹，帮助他治理天下。

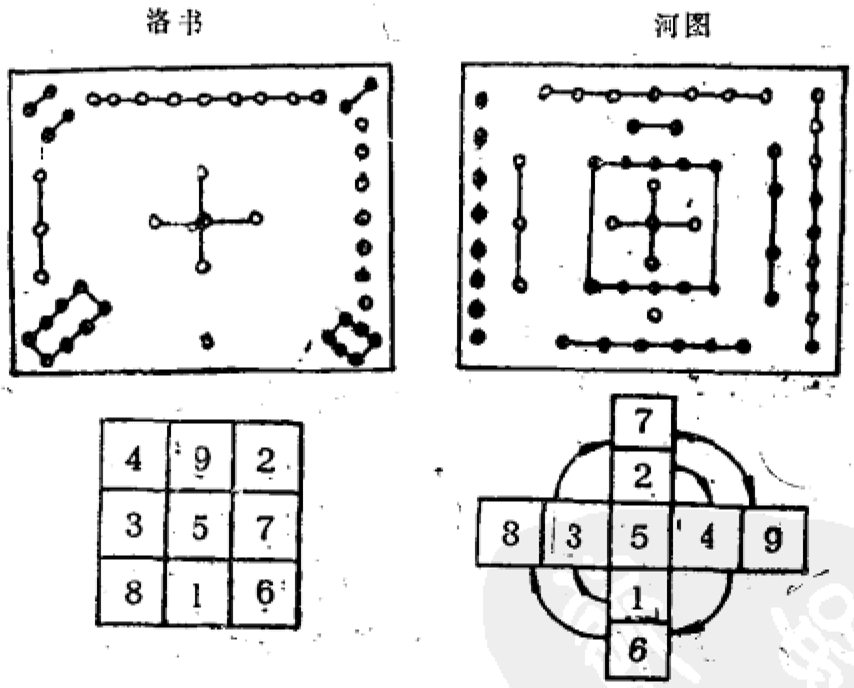


图 38

图中偶数用黑点表示，奇数用白点表示。洛书就是三阶幻方。河图则是另一种形式的幻方，在丢开中间的 5 与10时，奇数和偶数的和都等于20。

西方的幻方另有特色，往往以智力游戏面貌出现。1779 年，大数学家欧拉研究过下面的问题。

有 6 个不同的师团，现从每个师团中选出具有 6 种军衔的军官各 1 人，共36名军官。试问，能不能把这些军官排成

6 行 6 列的一个方阵，使得每行每列都有各个师团和各种军衔的代表？

36个军官的问题太复杂，不妨看 3 个师团 3 个军衔的情形。设用1、2、3表示师团编号；Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ表示军衔记号。将图 39（1）中的两个图并起来就得到一个符合要求的方阵（图39（2））。

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \text{I} & \text{III} & \text{II} \\ \text{II} & \text{I} & \text{III} \\ \text{III} & \text{II} & \text{I} \end{matrix} \qquad \qquad \begin{pmatrix} 1\text{I} & 2\text{III} & 3\text{II} \\ 2\text{II} & 3\text{I} & 1\text{III} \\ 3\text{III} & 1\text{II} & 2\text{I} \end{pmatrix}$$

（1）　　　　　　　　　　（2）

图 39

上面的方阵叫做正交拉丁方，或正交表。36个军官问题，其实质是求一个$n=6$的正交拉丁方。欧拉在作了各种尝试后宣称："我认为人们不可能造出一对6阶的正交表.同时对于10阶，14阶，……也不可能造出。一般地说，对任何奇数的2倍，都不可能造出。"欧拉的这一猜想，吸引了许多数学家进行研究。直到本世纪，终于由一位印度几何学家玻斯（Roj Chandra Bose）和他的学生西里克汉特（Shrikhande）彻底解决。

特别有意思的是，数理统计学家费歇尔将正交拉丁方用于试验设计。例如，用甲、乙两种金属冶炼某种合金。每种金属可以有三种不同用量，我们把每一种用量称为一个水平。怎样安排试验，才能使每种金属的各种水平各碰一次？如果把甲金属的三个水平看作上面问题中的三个师团，乙金属的三个水平看作三种不同军衔。这正好是$n=3$的拉丁正交表问题。费歇尔创造的这种试验设计，把一种智力游戏变成了节

约人力物力的具有重大价值的科学方法，并且由此推动了欧拉猜想的最终解决。

我国古老而丰富的文化遗产中，包含有许多智力游戏，它既能使人们从中得到欢娱，又磨励着人们的思想，只要我们善于挖掘，这也是一个智慧的宝藏。

十九、好奇心激发思考

青年学生史丰收创造了“快速计算法”，改变从低位算起的传统的数字计算程序，一律从高位算起。两个八位数相乘，只要三四秒钟，人们按着电子计算器也比不过他，计算速度比世界著名的速算家克莱因还要快三倍。更为可贵的是，古今中外研究速算的虽然很多，但一般只能对一些具有特殊规律的数字进行速算，而史丰收却发现了一种普遍的规律，能对任何数进行速算。

年仅23岁的史丰收为什么能创造出这样的奇迹？这还得从他读小学二年级的时候谈起。一次算术课上，史丰收看着老师在黑板上演算习题，脑子里忽然产生了一个奇怪的想法：这些习题、数字真怪，人们读、写、看都是从左往右，从高位往低位；而运算起来，为什么偏要从右往左，从低位往高位呢？要是有一种办法能从左往右算，将读、写、看、算一致起来就好了，说不定还能简化运算过程，直接写出得数呢！

小丰收举手问老师：“算术能不能从左到右，从高位算起？”“什么？从高位算起？”多么奇怪的想法。老师沉思了一会儿，说道：“从来都是这么算的，课本上也是这么写的，你也就跟着这么学吧！不过，你要是有兴趣，也可以发明创造嘛！”

“对，我也要发明创造！”小史丰收从此踏上了研究速算法的征途。经过十年苦心钻研，历尽千辛万苦，他终于研究成功快速计算法，后来又在中国科技大学的帮助下，著作了

《快速计算法》一书，不但风行国内，而且远售香港和日本，引起了国内外强烈反响。

一个关于“运算为什么要从低位起，能不能改为从高位起？”的好奇心，激发一个小学生奋斗十余年，终于搞出了一项了不起的发明创造。可见，好奇的心理品质在发明创造中有着重要作用。正如贝弗里奇所说：“对于研究人员来说，最基本的两条品格是对科学的热爱和难以满足的好奇心。”其实，好奇之心人皆有之，并且是一种与生俱有的本能。只不过一般说来，科学研究爱好者比常人保持有更多好奇的本能。科学家的好奇心，通常表现为探索被他所注意到，但尚无令人满意的解释的事物或其相互关系的认识。科学家常常具有一种强烈的愿望，努力寻求其间并无明显联系的大量资料背后的一般原理。这种强烈的愿望可视为一种升华了的好奇心，热衷于研究工作的学生，往往是一个具有超乎常人好奇心的人。史丰收就是这样的。他不仅对数字运算具有强烈的好奇心，对其他事物也充满了好奇。小丰收看见兔子死了，浑身冰凉，就将死兔抱到坑上，想把它烘暖烤活，“死了为什么就不能再活呢？”他觉得非常奇怪。

在数学里有着许多令人觉得新奇而有趣的内容。无论是一张很薄的纸，还是一个很薄的肥皂泡，都有两个不同的面。数学里的曲面一般也有两个面。那么，有没有只有一个面的曲面呢？如果用一张长方形的纸条，先把纸条的一端扭转180°，然后再与另一端用浆糊粘起来，就会得到如图40所示的曲面。

用针在曲面上刺一个小洞 p，并且把这个环形曲面竖着放。设想有一个小人头向上站在 p 点，然后沿环面走一圈，当小人仍旧回到 p 点时，你会惊奇地发现，这时小人的头已

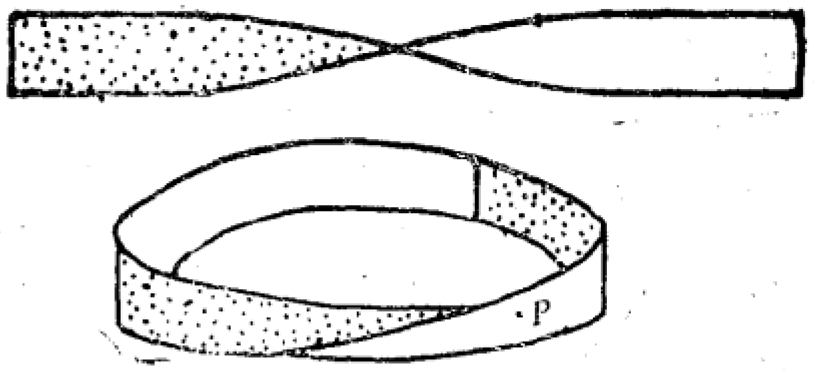


图 40

朝下。数学里把这种曲面称为单侧曲面。因为是莫比乌斯首先发现这种曲面的存在，因此通常又称为莫比乌斯面。

下面是著名的杨辉三角形，经过仔细观察，你会从中发现许多奇妙的性质。如：

（1）对称性。每行中与首末两端等距离的两数相等，

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \\
 & & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \\
 & C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & \\
C_6^0 & & C_6^1 & & C_6^2 & & C_6^3 & & C_6^4 & & C_6^5 & & C_6^6
\end{array}
$$

即$C_n^r = C_n^{n-r}$。

（2）递归性。除去三角形两腰上的数，每个数都等于它肩上两数之和，即$C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$。

（3）第n行各数的和等于2^n，即$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^n = 2^n$。

（4）第n行各数平方和等于第$2n$行中间的数，即

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2) + \cdots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

（5）平行于腰的一条线上的自第一项起的连续n个数的和等于最后一个数斜下方的那个数。即

$$C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \cdots + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$$

或

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \cdots + C_{n+m}^n = C_{n+m+1}^{n+1}.$$

以上这些恒等式都可以运用组合性质加以证明。

值得注意的是，儿童的好奇心往往很强烈，他一天可以提出几十个、上百个“是什么”“为什么”，其中许多是荒唐而又很有意义的问题。但在通常的成年人身上，孩提时代的好奇心会随着知识的增长而慢慢消失。而在创造力旺盛的科学家那儿，这种童年时代的好奇心持续的时间特别长，而且特别强烈，正所谓“童心未泯”。正因为这样，科学家才能在常人熟视无睹、不以为然的地方发现问题，创造出新的东西。正如爱因斯坦所说，他从孩提时代直至长大成人，一直总觉得时间是“可疑的”。否则他就不可能创立相对论。

虽然对科学的好奇是进行研究工作最重要的思想条件之一。但是，仅有好奇心是很不够的，还需要有丰富的知识、敏锐的洞察力和坚持不懈的毅力。新元素钒的发现过程就提供了一个很好的例证。

德国化学家维勒，1830年在研究墨西哥产的褐色铅矿石时，奇怪地发现矿石里有一些金属化合物，呈现多种颜色，其中以红色最显著。他当时只是想当然地认为，这种金属也许是铬吧。因为铬的化合物大多呈现红色，因而没有深入进行研究。

后来，瑞典的年轻化学家肖夫斯特姆，也发现了与维勒相同的现象，但他抓住这一奇特的现象，深究细察其原因。对搞不清楚的问题，及时请教老师，坚持不懈地实验和研究，终于发现了一种新元素“钒”。当维勒知道了肖夫斯特姆的新发现后，为自己当初轻易放过机遇而悔恨不迭。

二十、思维“共振”

1900年在巴黎第二届国际数学家代表大会上，希尔伯特用23个数学问题，揭开了20世纪数学发展的帷幕。半个多世纪来，世界数学发展的进程充分证明了希尔伯特的高瞻远瞩和非凡的战略眼光，使他成为20世纪最伟大的数学家。

据说，后来的国际数学家大会上，再也没有人能作这种全面展望未来的综合报告。希尔伯特何以能够通晓这么多数学的前沿学科，紧紧把握住数学前进的脉搏？说起来，这里还有一段有趣的故事。早年在哥尼斯堡读大学时，希尔伯特与同学闵可夫斯基、老师赫维茨每天下午五点，必定相会在苹果树下散步。日复一日的散步中，他们全都埋头讨论当前数学的实际问题，相互交换对问题新近获得的理解，交流彼此的想法和研究计划。三个年轻人以这种最悠然而有趣的学习方式，考察着数学世界中的每一个王国。三个智慧的心灵经过一次次碰撞，迸发出一朵朵创造的火花，从而为后来数学事业的腾飞进行了充足的能量储备。因此，如果有人说希尔伯特的数学成就是在苹果树下散步得到的，是一点也不夸张的。

物理学上有一种共振现象。所谓共振，就是当外来的频率与振动体的固有频率接近或相等时，振幅会因此急剧增大的现象。据说，历史上曾发生过这样一件事，一队士兵迈着整齐的步伐通过一座桥时，由于发生共振，竟使桥倒塌。在人才的思维之间，如果思维“频率”相同，就会思路相通，会意知音，使孕育中的新思想迸发出光彩夺目的火花，甚至

会导致一门新学科的诞生。我们不妨把这种现象称为思维"共振"。如果一个人用自己的一个苹果与另一个人的一个桔子交换，结果仍然是两个水果。而当一个人用自己的一个新思想与另一个人的一个新思想交换时，由于思维的碰撞、"共振"，就会组合、激发出多于两个的新思想。在思想领域里，不等式1+1>2永远成立。

思维"共振"，或者说，几个志同道合者在互相帮助、互相信任的气氛中进行的学术讨论，对于催化新思想的诞生，会在下列几个方面有所帮助：

1. 一个新理论可能需要集中几个人的知识和智慧的总和才能产生，而其中任何一个人都不单独具备必要的知识，用以得出这个新结论。

2. 讨论是揭露谬误的宝贵方法。以错误知识或不合理推导为基础的设想，可以通过讨论得到纠正。同样，盲目的狂热会因受到忠告而被遏制。一个无法与同事谈论自己工作的与世隔绝的研究者，常因追踪错误线索而浪费时间。

3. 开展学术讨论和交流观点往往使人振作，给人以激励和鼓舞，特别是在人们遇到困难、心情烦恼的时候。写到这里，我不由得想起了我国年轻的化学家温元凯和他的小阁楼。在那知识越多越反动的年代里，人们不能公开讨论科学。温元凯和他的朋友郭本瑜、陈平、陈应天、郑玮等人就躲进一间简陋的小阁楼里，谈科学，谈理想，交流科研题目，讨论科技政策，编写国际科技发展动向的资料。一间只有八、九平方米的小阁楼成了他们"无形的学院"、信息的交流站和心中的科学会堂。他们用各自的追求科学的热情之火，互相温暖着、鼓舞着，终于度过了漫漫长夜，并且为以后的冲向世界积蓄了能量。如今，他们这一批人都从小楼阁里走出来

了，温元凯是中国科技大学教授，郭本瑜已成为上海科大的校长、教授……；并先后登上国际学术讲坛报告自己的科研成果，为祖国争得了荣誉。

4．讨论能够帮助人们摆脱那种已经形成了的、事实证明是无成效的思维习惯．心理学家注意到，我们一旦犯了错误，比如把一大串数字加错了，往往有一再重复这个错误的倾向．思考问题时也是一样，我们的思想每采取一次特定的思路，下一次采取同样思路的可能也就越大．在一连串的思想中，一个个概念之间形成了联系，这种联系每利用一次就变得更加牢固，直至最后，这种联系异常紧密，以至很难破坏，因而使思维受到了束缚．我们很可能已经具备解决某个问题的足够资料，然而，一旦采用了一种不利的思路，问题考虑得越多，采取有利思路的可能就越小．正如尼科尔所说："面临困难的时间越长，解决困难的希望越小．"心理学称这种现象为思维定势．开展相互争鸣的学术讨论是打破这种思维定势的最好方法．

思维"共振"甚至可以不受学科、专长的限制，学科不同更有利于取长补短．1902年3月间，瑞士伯尔尼大学哲学系学生索洛文在大街上看到爱因斯坦讲授物理学的广告．他便按广告上的地址去寻找爱因斯坦，两人初次见面，谈得非常投机、默契，一谈就是三个半小时．第二天，索洛文又去爱因斯坦处谈天．后来，又有一个准备去中学教数学的哈比希特加入进来，三人每天共同学习讨论大量哲学、自然科学和文学名著．这样的活动一直持续了三年半之久．这三年多的聚会，对爱因斯坦后来创立相对论起了极为重要的作用．他们恢谐地称这种讨论为"奥林比亚科学院"．因此可以说，爱因斯坦的相对论，也是思维"共振"的结果．

二十一、学会欣赏数学

数学，由于它的语言抽象、符号奇特、理论严谨，就象一堵高墙，把它与生气盎然的周围世界隔开了。许多人因此望而生畏，学而生厌。可是，陈景润为了攻克“哥德巴赫猜想”难题，不顾病魔缠身，身居斗室，顽强拼搏二十多年，终于成为摘取这颗“皇冠上的明珠”的世界冠军。是什么东西吸引着他？除了陈景润有着崇高理想这一点外，还因为数学本身蕴含着一种令人神往的东西——数学美。

美是客观事物的一种自然属性，表现为能够引起人们的兴趣、愉悦和精神上的满足。悦耳的音乐，艳丽的花朵，传神的艺术品，以及在纷繁混乱的事物中建立起和谐与秩序的科学理论，都能使人们惊喜，给人以美感上的满足，因此它们都是美的。人们通常把文学艺术中的美称为艺术美，把科学理论中的美称为科学美。科学美是大自然的美在科学理论中的反映。数学美就是体现在数学理论中的科学美。数学中的确存在美。自古以来，就有人在研究数学中的美。古希腊的毕达哥拉斯学派提出“一切立体图形中最美的是球形，一切平面图形中最美的是圆形”。爱好音乐的人，常常会被一泻千里、奔腾澎拜的乐章所激动；被涓涓细流、舒缓清澈的旋律所陶醉。数学中也不乏这样的“乐章”。印度数学家拉曼努章发现了下面奇妙的式子：

$$n(n+2)=n\sqrt{1+(n+1)(n+3)}$$
$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)(n+4)}}$$

$$=n\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)(n+5)}}}$$

$$=\cdots$$

这个式子，无论是无限延续，还是在这一无限过程的任何一步上中止，它都是正确的．实在令人惊羡不已！

艺术家用色彩、线条、旋律等形象语言创造着美，给人以美的享受．数学家则是把自然规律抽象为一些符号或公式，再通过逻辑推理演绎成一幅自然界的完美和谐的图象．在那些缺乏科学修养的人看来简直令人窒息的符号、公式之中，数学爱好者却能享受到一种无穷的乐趣．特别是那些攀上科学高峰的人，一览众山小，尽情欣赏大自然千变万化的壮丽景色，会得到一种最大的满足和享受．正如居里夫人所说："科学的探讨研究，其本身就含着至美，其本身给人的愉快就是报酬，所以我在我的工作中寻到了快乐．"

数学美大致体现在如下几个方面：

1．理论的严谨性．严密的逻辑推理是数学的主要特征．为了证明一个定理或解答一道题目，我们写出的每一个式子、每一句话都必须有逻辑依据，否则是不能为人接受的，正因为如此，初学数学的人常常会感到不习惯．严谨性是思维有序性的一种表现，与思维混乱相对立，能给人一种清晰明快的美感．在欧几里得几何中，除了点、线、面等少数几个原始概念和等量公理、平行公理等少数几个未经证明而直接采用的公理外，其余的概念和命题都是经过逻辑推理演绎得到的．一部几何学宛如一座精美的艺术宫殿，其简洁美丽的结构如同艺术珍品中明晰欢畅的线条和色彩，其哲学思辩的魅力仿佛古典乐章中那优美动听的旋律，令人惊奇叫绝．在近代数学中，有无严格的公理化结构已成为衡量一门数学学科是否成熟的重要标志．概率论在初期是通过频率来讨论概率，把概

率理解为当试验次数很大时，频率的稳定值。但是"稳定"这个词的含义多少有些模糊，给问题的深入讨论带来了困难。数学家通过对各种概率模型的研究，发现概率具有三个共同的性质：

（1）任何事件的概率都在0与1之间，即$0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

（2）概率具有可加性，即若A、B是两个不相容事件，则有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

（3）对于必然事件U，恒有$P(U)=1$。

机智的数学家就抓住这三条作为公理，建立起概率论的公理化结构，为概率论的发展和应用开创了新局面。

2．形式的对称性．对称是美的一种重要形式．数学美也体现在数学的各种对称性之中．等腰三角形、等腰梯形是轴对称图形，平行四边形是中心对称图形，圆既是轴对称图形又是中心对称图形，它的每一条直径都是对称轴．难怪有人说，圆是世界上最美的图形．对称方程组有着巧妙解法，轮换对称在因式分解中有着重要应用．不等式，$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当两个正数$a$、$b$相等（对称）时等号才成立．所有周长相等的平面图形中圆的面积最大（圆是平面图形中对称性最好的图形）．一切具有等表面积的几何体中球的体积最大（球是几何体中对称性最好的图形）．即使在数学公式中，也常常会看到一种对称美。例如三角函数的和角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

学会认识和欣赏数学中的对称美，对于激发学习兴趣、

学好基础知识、记忆公式都是有所帮助的。

当然，数学中的对称性有着更加深刻的内容。年轻的法国数学家伽罗华创立的群论便是一个典型的例子。伽罗华的群论思想是，对每个多项式方程都与一个群建立起联系，使群的性质和方程的解的性质密切相关。特别是他发明的群很好地反映了多项式方程根的对称性，提出了多项式方程能用四则运算和开方来确切地解出的条件是它的伽罗华群要有很好的结构。由于五次以上的方程的对称群太复杂了，因此，没有可用四则运算和开方表示的求解公式。从而结束了几个世纪以来，人们为了寻求五次方程的求解公式所作的那种注定要失败的努力。

3。思维的独创性。数学美还体现在思维的创造性之中。欧几里得的《原本》得到后代人的极高评价，但是许多人认为《原本》中的第五公设不象其他几个公设和公理那样显而易见，试图能从其他公理中把它推证出来。二千年来，许多著名数学家为证明这个第五公设付出了艰辛的努力，不少人曾兴奋地宣布自己已证明了第五公设，但是不久就有人指出他的证明有错误，结论不能成立。年轻的罗巴切夫斯基也曾试图证明平行公理，但是接二连三的失败使他一反前人，提出了一条与第五公设完全相反的公设："过一点至少可以引两条直线与已知直线平行"；由此出发创造了一个崭新的几何学。在这种几何学里三角形三内角之和小于180°。人们把这种几何学称为罗氏几何学。现在罗氏几何学和"三角形三内角之和大于180°"的黎曼几何都已在相对论中得到了具体应用。可以想见，当年罗氏发现新几何的时候，在感情上一定会感到极大的幸福与满足。就是我们这些现在的人，在学习罗氏几何时也都为罗氏的大胆创造产生一种惊奇和喜悦的心

情．正如著名科学家贝弗里奇在《科学研究的艺术》一书中所写：新发现带来的激动“是人生最大的乐趣之一．它产生一种巨大的感情上的鼓舞和极大的幸福与满足．不仅是新事实的发现，而且对一个普遍规律的突然领悟都能造成同样狂喜的情感．”当然思维的独创性是有层次的，可分为高级的与低级的．例如，著名教育家赞可夫就曾高度赞扬一个小学生用 $7\times7-3$ 这一思路去求得 $7+7+7+4+7+7+7$ 的和．因为他“创造”了一个原题中似乎不存在的7．这个学生仍然会从这种新奇而富有创造性的解答中得到精神上的满足和快感．

4．内容的统一性．代数与几何是数学的两大分支，内容和方法都不相同．但是笛卡儿创立了解析几何以后，代数与几何就被高度统一起来了．把两个数进行+、－、×、÷四则运算，计算一个几何图形的面积、体积，求一个函数的导数、积分，……它们的具体内容是完全不相同的，但用集合的观点看来，则都是集合与集合之间的一种对应关系．因此，现代数学将集合论作为整个数学理论的基础．法国的布尔巴基学派经过对现代数学的深入研究和梳理，认为全部数学基于三种母结构：代数结构、序结构和拓扑结构．他们根据这一指导思想写作了《数学原本》三十多卷．它涉及现代数学的各个领域，概括了最新研究成果，内容包括集合论、代数、一般拓扑、实变函数论、线性拓扑空间、黎曼几何、微分几何、调和分析、微分流形、李群等分支．他们不崇尚技巧，而重视数学内在的结构，揭示了数学的统一性．一幅好的图画，一曲优美的音乐都必须是和谐的．统一也是一种和谐．因此，布尔巴基的工作显示了数学的和谐．布尔巴基学派的思想对现代数学的发展和数学教学产生了深远的影响．

当然，数学美不仅限于以上几个方面，众所周知的黄金

分割就具有重大的美学价值．著名的雕塑《维纳斯》和达·芬奇的名画《蒙娜丽莎》就是按照黄金分剩的比例来构图的．世界上享有盛誉的建筑物巴黎圣母院和巴黎埃菲尔铁塔在比例上应用的也是黄金分割法．

学会欣赏数学美，不仅能将学习和研究数学化为一种使人愉快的活动，而且还有助创造性思维的产生．生理学研究成果说明，人脑分为左半脑和右半脑．美育能调动右半脑的功能．根据兴奋与抑制相互诱导的规律，经常处于兴奋状态的左半脑，在美育中会得到积极的休息．由于左右两半脑是一个整体，右半脑的积极活动会促进左半脑，在大脑皮层建立起广泛的暂时的神经联系，形成丰富的表象，这样思维就更加活跃、敏捷．当两个半脑的活动达到高潮时，只要一旦出现某种偶然的契机，它们便会协同奏出灵感和顿悟的交响乐．

当然，就数学而言，不一定能立刻引起人们的美感，或者人们不可能一下子就看出它的审美价值．但是培根说得好："美中之最上者是图画所不能表现，初睹者所不能见及的．"对于一个初学者来说，由于阅历、知识水平和审美能力的限制，面对审美对象往往很难体味出究竟美在哪里，这就需要我们在学习数学的过程中，自觉地陶冶自己的审美情操，锻炼自己的美感直觉，只要持之以恒，假以时日，就一定能逐步透过抽象的符号看到美的形象，透过形式逻辑的推演领略到美的神韵，甚至会驾起数学美的神舟，达到创造思维的彼岸．

二十二、让潜意识驰骋

四元数的发现，被誉称为19世纪的七大发现之一，对近世代数产生了很大影响.发现者是爱尔兰大数学家汉密尔顿.可是，这个伟大的发现却是汉密尔顿在散步时得到的.

1843年10月16日，汉密尔顿和他的妻子一同去都柏林市，当他步行到希洛汉桥时，思想的电路突然被接通了，迸发出火花，终于得出了四元数的基本公式.他当即从身边拿出一本笔记本，立即记了下来.后来，爱尔兰皇家协会为了纪念这个伟大发现，就把希洛汉桥改名为“四元数桥”.在此之前，汉密尔顿曾为这个数学问题苦心研究了15年，想不到竟在一次散步中得以解决.真是“踏破铁鞋无觅处，得来全不费功夫”.

印度有一个数学家，经常在睡梦中发现数学公式、定理，早上起床后证明，有些能证明出来，有时则一时证不出来，甚至要到半年以后才能重新证明出来.

法国大数学家彭加勒说，他在数学发明中遇到的那种“突然彻悟”，常常发生在“经过一种长久的不自觉的工作”之后。他进行数学困难问题的思考时，开始常常没有进展，于是就略作休息，再继续工作，往往就会有重要的思想突然发生.

这种奇妙现象不独数学家有，我国古代文学家欧阳修，他的一些文章的精巧构思就常常得于“马上”、“枕上”、“厕上”.

著名围棋大师聂卫平，一边下棋还要一边走路。细心的人给他算了一下，他下一盘棋要足蹬健身鞋走十多里路。聂卫平正是利用来回走路这种活动，缓和大脑紧张状态，使思路发散开来，诱发灵感，继而从中选择最佳招式，巧妙制胜。

为什么在紧张工作一段时间以后，悠游闲适和暂时放下工作的时候，灵感会蓦然而至？这可以用近代心理学发现的潜意识活动加以解释。所谓潜意识，是我们自己的意识所不能觉察到的心理活动。意识既不能察觉到，我们又怎么知道它的存在呢？有人做过这样的实验。吩咐一名受催眠者在醒后某时某刻做一件事。他醒后虽然记不起吩咐的话，到了时刻却不由自主地无意地把所吩咐的事做得一点不差。这说明我们的意识在休息时，潜意识仍在不受约束地积极活动。由于这时思维不受心理定势的干扰，自觉的思考不很紧张，更能产生许多奇特的联想，因而最容易诱发灵感。诺贝尔生理学奖获得者康伯格说过："一个建树甚伟的科学家既需要对一个目标高度集中，又需要某种游移不定。"数学家汉密尔顿的散步，围棋大师聂卫平在下棋时的走路，就是这样的一种"游移不定"状态。著名心理学家弗洛伊德曾形象地把潜意识系统比作一个大前庭，意识系统是一个小房间会客室，两个房间的门槛上有看门人，许多潜意识的东西向意识所在的会客室里挤，有些被看门人遣送回去，压在无意识中，有些被看门人准许跨过门槛进入前庭，但它还没有变为有意识的，可以称为前意识，只有等到意识注意到它时才会变为有意识的。这个形象的说法可以帮助我们理解潜意识与意识的相互关系。当然，这个问题的完全弄清楚，尚有待于脑生理和思维科学的进一步发展。

以上事实启示我们：当我们解一道难题经过冥思苦想毫

无进展，或学习一个深奥的定理苦思良久仍不甚明了的时候，不妨暂时放一下，或翻阅文艺书籍，或出外散步、打球，或与朋友们一起聊聊天，让潜意识更好地发挥功能，说不定灵感就在这时悄悄降临。正如古诗所云："众里寻他千百度，蓦然回首，那人却在，灯火阑珊处。"

二十三、衣带渐宽终不悔

如果有人只看到灵感常在松弛时出现，就简单地认为，不要付出艰苦的劳动就可以获得灵感，那就大错而特错了。

虽然四元数是汉密尔顿在散步时发现的。但是，如果这个数学问题没有缠住汉密尔顿"至少15年"，灵感的火花绝不会在他头脑里闪现。著名艺术大师列宾说得好，"灵感是顽强劳动获得的奖赏"。大发明家爱迪生说得更加精确，"发明是百分之一的灵感加上百分之九十九的血汗"。

牛顿发明了微积分，制定了力学三定律，并在发现万有引力和光的微粒说中作出了关键性的贡献，堪称为科学巨匠、超级天才。可是，牛顿成就的取得，主要是靠辛勤劳动，而不是依赖灵感。这可引用他的助手H．牛顿的话为证："他很少在二三点钟以前睡觉，有时到五六点，……特别是春天或落叶的时候，他常常六个星期，一直在实验室里。不分昼夜，灯火是不熄的，他通夜不眠地守过第一夜，我继续守第二夜，直到他完成他的实验。"

大数学家欧拉，从19岁起就开始写数学论文，直到76岁．半个多世纪中写下浩如烟海的书籍和论文。几乎每一个数学领域，都可以看到欧拉的名字。初等几何的欧拉线（三角形外心、垂心、重心、九点圆心共线，叫欧拉线），多面体的欧拉定理，数论中的欧拉函数，复变函数论的欧拉公式等等．现在常用的数学符号，如用e表示自然对数的底，用i表示$\sqrt{-1}$等也都起源于欧拉。欧拉惊人的贡献并非偶然，他可

以在任何不良的环境中坚持工作．他常常抱着孩子在膝上完成论文，也不顾较大的孩子在旁边喧闹．甚至在双目失明后的17年间，欧拉仍以惊人的毅力与黑暗搏斗，凭着记忆和心算进行研究，口述著作了几本书和约400篇论文．欧拉一直工作到生命的最后一刻．1783年9月18日下午，那时天王星刚发现不久，欧拉写出计算天王星轨道的要领，喝完茶后，突然疾病发作，烟斗从手中落下，口里喃喃地说："我死了．"欧拉这才"停止了生命和计算"．

下面再举一个现代数学中的例子．近十年来，能够进一步揭开宇宙秘密的混沌理论象一颗耀眼的明星，吸引了许多学者．混沌现象是自然界的一种普遍现象．正在袅袅上升的一缕青烟，会突然变成层层烟圈，四处飘散．巨大的风暴，可怕的地震，心肌梗塞，……，这些灾变现象到处可见，层出不穷．即使在实验室风洞条件下，旗帜也总是呼啦啦地飘忽不定，而不是平坦地展开．所有这一切都使人觉得，混乱无所不在．就是在数学里也存在着混乱结局．1974年，美国马里兰大学的李天岩和他的导师约克教授发表了《周期3则乱七八遭》的著名论文，指出如果区间到区间自身的连续函数有一个3周期点，就乱七八遭什么周期点都会出现*．

混沌现象难道真的没有任何规律吗？美国康奈尔大学的菲根鲍姆（M.Feigenbaum）就不相信．他在70年代中期取得博士学位后，苦苦思索混沌现象．但多年来毫无进展．按照美国的博士后研究制度，一个浅资博士后研究人员，如果不是每年有相当水平的论文发表，就很难立脚．菲根鲍姆因为好几年未发表过论文，被人赶来赶去，日子很不好过．康

---

*如果从$x=x_0$开始按照公式$x_{k+1}=f(x_k)$迭代n次，回到原来地方，但当迭代次数小于n时都不回到原来地方，x_0就叫做$f(x)$的一个n周期点．

奈尔大学呆不住，就到了一所三流工学院，继而工学院的饭碗也保不住。最后被他的老师带到一个室验室工作。但是菲根鲍姆并未放弃对混沌现象的研究。没有现成的理论工具，他就从“最笨”的函数迭代做起。几年时间里，他手不离微型计算机和计算器，一次一次地迭代计算，这样那样地拼凑组合，苦苦探索其中的规律。光阴流逝，晋升无望，他都置之不顾。热爱自会把一切烦恼推开。正如马克思所说，在科学的门口就象在地狱的门口。如果没有甘愿为科学下地狱的精神，又怎能窥视科学的真谛。

如果 $x_n = f(x_{n-1})$ 是[0，1]到[0，1]的一个迭代，乘上一个常数 $\lambda>0$，变成迭代 $x_n = \lambda f(x_{n-1})$。随着 λ 的增大，先是只有周期 1 的定常解；当 λ 增大到 λ_1 时，周期 1 的定常解分叉为两个周期 2 的定常解；当 λ 增大到 λ_2 时，周期 2 的定常解分叉为四个周期 4 的定常解，……；当 λ 增大到 λ_m 时，周期 2^{m-1} 的定常解分叉为 2^m 个周期 2^m 的定常解……。如此下去，最终出现混沌。这就是周期倍化分叉现象。见图40。

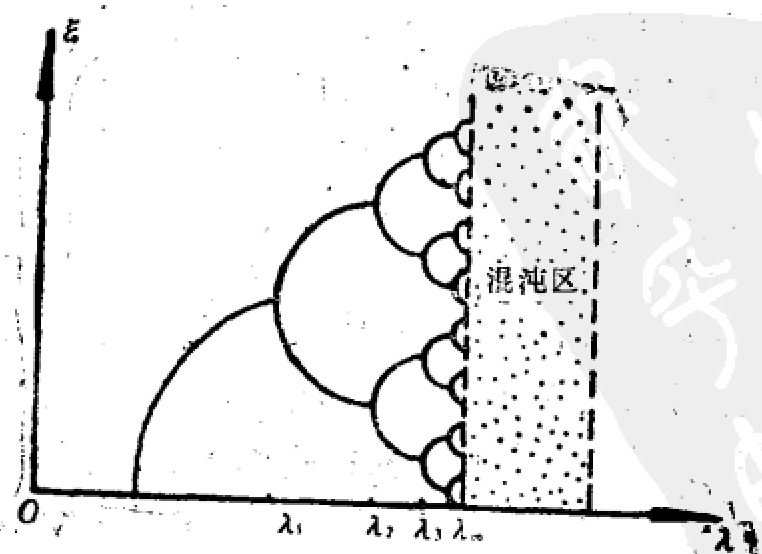


图41 周期倍化分叉现象

λ是迭代参数，ξ表示定常解的位置

以 $f(x)=\lambda x(1-x)$ 这个简单迭代函数为例，周期倍化分叉中的间距比值变化情况如下表：

周期倍化分叉中的间距比值变化情况

（$f(x)=$ 值 $x(1-x)$）

m	分叉情况	分叉值 λ_m	间距比值 $\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1}-\lambda_m}$
1	1分为2	3	
2	2分为4	3.449489743	4.751466
3	4分为8	3.544090359	4.656251
4	8分为16	3.564407266	4.668242
5	16分为32	3.568759420	4.66874
6	32分为64	3.569691610	4.6691
⋮	⋮	⋮	⋮
∞	周期解→混沌	3.569945972	4.669201609

最后，菲拉鲍姆在浩如烟海的数字世界里终于发现，不管 $f(x)$ 是怎样的迭代函数，当 m 趋于无穷大时，周期倍化分叉中的间距比值 $(\lambda_m-\lambda_{m-1})/(\lambda_{m+1}-\lambda_m)$ 总是趋向于同一个数值4.669201609……！这是本世纪的重大发现之一，学术界把这个数值誉称为菲根鲍姆常数。

天才尚且需要勤奋，我们普通人更须加倍努力，才能学

有所成。《科学成功的奥秘》一书中有这样一段话："立志，工作，成功，是人类活动的三大要素。立志是事业的大门，工作是登堂入室的旅程。这旅程的尽头就会有个成功在等待着，来庆祝你的努力结果。"如果把灵感比作鲜花，那么远大的理想、勤奋的工作就是土壤。只有把灵感深深扎根于远大理想、辛勤劳动这块肥沃的土壤上，才能真正开放出鲜艳的花朵，并且永不凋谢。诗句"为伊消得人憔悴，衣带渐宽终不悔"正是对那些为了崇高的事业而艰苦奋斗的人们的一种形象写照。

二十四、读一点数学史

培根说得好，“读史使人明智”。历史这面镜子能够映照出科学发展的足迹，使我们更好地了解过去，认清现在和把握未来。数学史是研究数学的历史过程，从中找出其发展规律的科学。数学史既有对数学定理、公理和重要数学思想的发现、发展的研究，还有数学各分支内部发展的途径，数学成就产生的主客观原因、数学家的生平传记等方面内容。近年来，数学史更进入了对数学思想和方法的历史演变进行分析研究的阶段。凡著名的数学家无一不具有数学史方面的修养。许多人正是由于受到历史上名家大师的著作的启发而获得新的发现。读一点数学史，对于拓宽思路，增强数学创新能力，可以在如下几个方面得到益处：

1. 有助于把握数学的真谛。通常的数学教科书总是给出一个系统的逻辑体系，使人们产生这样一种印象：数学家们理所当然地从定理到定理，数学家不会遇到任何困难，并且这些课程已经千锤百炼，没有什么可改变的。学生被淹没在成串的定义、定理和公式之中。

数学史可以告诉我们，一个学科的发展是汇集不同方面的成果逐步积累而成的。常常需要几十年、甚至几百年的努力才能迈出关键性的几步。不但这些学科并非无缝的天衣，就是那些已经取得的成就，也常常只是一个开始，许多缺陷有待填补，或者真正重要的扩展尚有待创造。例如函数概念，是由莱布尼兹最早引进数学的。当初只是用来表示象曲线上

的点的横坐标、纵坐标、切线的长度等所有与曲线上的点有关的量。这个定义与现在的函数定义相差甚远。后来，瑞士数学家约翰·贝努里对函数概念进行了扩张，把"由变数x和常数所构成的式子，叫做x的函数"。以后又经过多次扩张才得到现今中学课本里函数的定义。在康托创立集合论后，函数概念被进一步扩张为："对于以集合为元素而构成的集合P的每一个元素A，如果在另一个集合Q中有完全指定的元素B与之对应，那么，集合Q叫做集合P的函数。"直到本世纪40年代，由于物理学的需要，又引入了广义函数的概念，使函数概念再一次得到扩张。一个人只有知道一个概念、一套理论的背景和来龙去脉时才能真正深刻地掌握它。

2. 可以从前辈数学家的思想方法和坎坷经历中得到启示和激励。数学是时间的函数。没有古埃及人用象形文字写的一次方程，就不会有近代的方程论和群论；没有欧几里得的《原本》，就不会有非欧几何与公理化方法的诞生。在公元前4世纪，欧多克斯用来计算面积、体积的穷竭法中，已经含有微积分的萌芽。在我们的祖先用小竹棍进行筹算时，就已经出现负数概念和矩阵论的雏形。所有现代数学都是在前人数学思想和方法的基础上创立和发展起来的。正如大数学家外尔（H.Weyl，1885—1955年）所说：如果不知道远溯古希腊各代前辈所建立和发展的概念、方法和结果，我们就不可能理解近十年来数学的目标，也不可能理解它的成就。"

数学史中关于数学家如何跌跤，如何在迷雾中摸索前进，并且如何零零碎碎地得到他们的成果的叙述，不仅能使每个阅读者获得真知灼见，还将激起顽强攻关的勇气。你在数学史中可以读到大数学家欧拉曾在著作中写过这样一些错误结果：

$$1-3+5-7+\cdots=0$$

$$\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}+1+n+n^2+\cdots$$

$$=\frac{n}{n-1}+\frac{n}{1-n}=0$$

当时的数学界已经研究了级数的敛散性，而欧拉竟如此随意地处理级数运算，似乎令人费解。然而，这恰恰说明，即使象欧拉这样一位杰出的数学大师，也并不是万能的和永远正确的。因此，你完全不必为自已解不出某些难题或某项研究并非完美无缺而感到颓丧，重要的是要坚持下去。

3．有利于了解数学全貌．随着科学技术的飞速进步，数学也得到了迅猛的发展．在今天，不但牛顿式的全能科学家不可能产生，就连冯·诺伊曼那样横跨几个数学领域的大师似乎也难以再现．尽管一个人不可能精通每一门数学，但作为现代的数学爱好者或研究者，又必须了解整个数学的发展情况。因为现代数学大树虽然已经伸展出成百的分支，但它毕竟是一个整体，并且有它自已的重大问题和目标．如果一些分支专题对于数学的心脏无所贡献，它们就不会开花结果，正如希尔伯特所说："数学是一个有机体，它的生命力的一个必要条件是所有各部分的不可分离的结合。"这似乎是一个矛盾，解决这个矛盾的办法就是读一点数学史．数学史可以提供整个数学的概貌，不仅可以把课堂上学习的各个数学片断互相联系起来，而且能使它们跟数学思想的主干也联系起来，从而把你的学习和研究导入有成果的渠道．

4．熟悉祖国数学的辉煌成就，增强民族自豪感．中国是一个有着光辉数学传统的国家．我国古代的勾股定理，刘徽割圆术，杨辉三角形等都在世界数学史上占有重要的地位．

进入20世纪之后，熊庆来、华罗庚、陈建功、苏步青等老一辈数学家为我国的数学研究工作和数学教育事业作出了卓越贡献，在国际上也享有声誉。随后，陈景润、杨乐、张广厚等一批中青年数学家又取得了引人瞩目的成就，在一些研究方向上处于世界领先地位。所有这些都能激励我们更加努力学习，勤奋研究，为在数学领域全面赶上和超过世界先进水平贡献自己的力量。

近年来，我国已出版了一批数学史方面的书籍，为学习数学史提供了很好的材料.其中值得一读的有美国数学家M.克来因著的《古今数学思想》(已译成中文,由上海科学技术出版社出版)，渠宗巨先生著的《世界数学史简编》,张奠宙、赵斌编著的《二十世纪数学史话》等。

二十五、功夫在诗外

宋朝爱国诗人陆游，在去世前一年，给他儿子写了一首诗，传授自己写诗的经验，其中有两句是："汝果要学诗，工夫在诗外。"学诗理应在诗上多下功夫，陆游怎么要儿子到诗外去学呢？联系到他的另外两句诗"纸上得来终觉浅，绝知此事要躬行"，意思就明白了。"工夫在诗外"的含义是，写诗固然需要灵气，但如果一味关在屋子里冥思苦想，搜索枯肠，是绝不会写出好作品来的。只有留心诗外的各种事物，深入实际，亲身实践，注意倾听人民的要求和喜怒哀乐，才能激发创作的灵感，写出有血、有肉、有哭、有笑的好诗篇。

岂但写诗这样，世上一切学问都是如此。世界美术史上的名作《最后的晚餐》的作者达·芬奇，为了反映明暗度的层次，他研究了光学；为了画好树木花草，研究了植物学；为了刻画事物的形态，研究了力学；为了求得绘画的正确比例，又研究了数学……正因为达·芬奇在与绘画有关的各种学问里切实作了一番深入的研究，所以才登上了当时绘画艺术的高峰。

一些书法家正是从樵夫挑担、将军舞剑、高山流水中得到灵感，从而使自己的书法艺术得到升华，独创风格，自成一体，写就流芳千古的佳作。

华罗庚教授在向中国科技大学的研究生谈学习和研究数学的体会时也说：数学各个分支之间，数学与其他学科之间实际上没有不可逾越的鸿沟。以往我们看到过细分割、各搞

一行的现象，结果呢？哪行也没搞好。所以在钻研一科的同时，把与自己学科或分支相近的书和文献浏览浏览，也是大有好处的。

当今正处于一个知识爆炸的时代，新知识新学科不断涌现出来，如果一个人什么都要学也不现实，时间和精力都不允许。每个人只能够根据自己的志趣爱好和实际可能，选学其中一部分，组成各自特有的知识结构，既有一门专长，又有一定的广度，这样才能在学习和研究的道路上纵横驰骋，进退裕如。对于一个青年学生来说，特别需要注意的是不能偏科。针对一些想学理工科的学生忽视文科知识学习的倾向，苏步青教授多次提出学习理工的同学，要重视语文学习，的确是很有见地的。

这里我想着重说一下，自觉地学习和运用辩证法，树立辩证唯物主义世界观对于学习数学、研究数学都极为重要。恩格斯说过："数学是辩证的辅助工具"。在数学里充满了辩证法。加与减、乘与除、常量与变量、直与曲、有限与无限、微分与积分、随机与确定、模糊与精确……都是既对立又统一。就拿曲线的切线概念来说，要求某曲线在P_0点的切线，我们总是先在P_0点附近取一点P，然后连结P、P_0得到曲线的一条割线，让P点沿曲线向已知点P_0靠近一些，又可以得到一条新的割线，如此继续运动。当点P与已知点P_0重合时，割线的极限位置就是所求的切线。切线——割线——切线，静止——运动——静止，这里含有一个生动的辩证过程。如果没有一点辩证法思想，要理解切线概念是有困难的。如果再提高一个层次，在数学研究的过程中，哲学思想的指导更是不可缺少。事实证明：凡是科学中的重大发现，都是自觉或不自觉地运用唯物辩证法的结果。自觉性越高，科学洞察

力就越强，对事物的本质也就认识越深。反之，如果陷入形而上学、唯心主义，那就必然要把科学引向失败。我国著名青年数学家杨乐、张广厚在亏值和奇异方向的研究方面取得了突出成果，受到国内外函数论专家的高度赞扬。他们的成果被人们誉称为“杨—张不等式”。其实，国外很早就有人对这个课题展开研究，但他们看不到亏值和奇异方向之间的内在联系，把两者割裂开来进行研究，因而成效不大。杨乐、张广厚运用唯物辩证法作指导，把亏值和奇异方向联系起来加以研究，终于取得了突破。后来他们还专门写了一篇用毛主席哲学思想指导数学研究的经验总结，刊登在《红旗》杂志上。

当然，对于“工夫在诗外”这句话，也不能作片面理解。“工夫在诗外”是陆游在中年或晚年总结出来的一条创作经验。这时他的诗已经做得相当好了，缺乏的是扎根于现实生活的题材和真情实感，所以才能非常自信地说“工夫在诗外”。倘若对一个想学数学，但连一元二次方程都解不好的人说“功夫在数学之外”，则未免操之过急。比较正确的学习方法是，首先要努力学好数学的基础知识、基本技能和方法，打下牢固的基础，同时又要重视与数学相关科目的学习，以及数学知识在实际工作中的应用，不断拓广知识领域。只有这样，方能才思敏捷，学有所创，创有所成。

结束语：寄希望于现代思维科学

这本小书写到这里就结束了．如果读者朋友看了以后，能够对数学中的定义、定理、公式和法则是如何发现制定出来的，数学家是怎样进行思维的，灵感在何种条件下易于被激发出来，通过哪些途径可以使自己的思维更加活跃，从而增加在数学上有所发现有所创造的机会等问题，有了进一步的了解，作者也就感到莫大的欣慰，因为这正是我写作本书的初衷．

应该承认，本书并没有能完全揭开数学灵感产生的奥秘，至多只是为解开这个谜提供了思考的材料和线索，起到一种投石问路、抛砖引玉的作用．数学灵感之谜的完全揭开需要依赖于生命科学、脑科学和心理学的充分发展．遗憾的是，这几门学科虽已获得长足的进步，但仍有许多未知数有待人们去求解．几年前，钱学森教授提议，把灵感思维学同抽象思维学、形象思维学并列，共同作为思维科学的基础科学．他还指出"灵感是又一种人可以控制的大脑活动，又一种思维，也是有规律的，我们也要研究它，要创立一门'灵感学'".钱学森教授关于建立"思维科学"和"灵感学"的倡导，预示着这一研究领域出现了新的希望之光．可以相信，随着现代思维科学的深入研究，数学灵感的真谛必将以越来越清晰的面目显示在人们面前，犹如那潮水退尽以后露出的块块礁石一样．

但愿有更多的弄潮儿共同努力，促进这一天的早日到来．